

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А.Далингер

*Планиметрические задачи  
на построение*

Омск - 1999 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А.Далингер

*Планиметрические задачи  
на построение*

Учебное пособие

Омск - 1999 г.

Печатается по решению научно-методического совета Омского государственного педагогического университета

ББК 74.262

ДАЛИНГЕР В.А. Планиметрические задачи на построение: Учебное пособие. - Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999. - 202 с., ил. - 101, таб - 7.

ISBN 5-82680343-6

Данное учебное пособие посвящено одной из наиболее трудных, но интересных тем курса геометрии – «Задачи на построение». В нем раскрыты теоретические сведения, лежащие в основе решения задач на построение: геометрические места точек, преобразования плоскости, постановка задач на построение и основные методы их решения. Пособие снабжено большим числом решенных задач на построение, которые показывают как специфику использования основных методов решения задач на построение, так и специфику выполнения основных этапов решения этих задач (анализ, построение, доказательство, исследование).

Учебное пособие предназначено для студентов физико-математических специальностей педагогических университетов и институтов и для преподавателей вузов. Оно будет также полезно для учащихся общеобразовательных школ, лицеев, гимназий и для учителей математики.

В.А. Далингер, 1999

© Издательство ОмГПУ, 1999

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
§1 Планиметрические задачи на построение в школьных учебниках геометрии .....	10
§2. Постановка задачи на построение и основные этапы ее решения .....	30
§3 Задачи на построение, основные операции и методы, используемые для их решения .....	51
§4 Перемещения плоскости и их композиции .....	58
п.2.1. Перемещения плоскости и их свойства. ....	58
п.2.2. Композиции перемещений плоскости. ....	66
§5 Подобие и гомотетия. Инверсия .....	71
§6 Геометрические места точек, используемые для решения задач на построение в планиметрии .....	75
§7. Решение планиметрических задач на построение основными методами. ....	89
п.7.1. Метод геометрических мест точек.....	89
п.7.2. Метод осевой симметрии.....	99
п.7.3. Метод спрямления.....	104
п.7.4. Метод вращения и метод центральной симметрии. ....	112
п.7.5. Метод подобия.....	118
п.7.6. Метод гомотетии. ....	124
п.7.7. Метод параллельного переноса.....	129
п.7.8. Метод обратности.....	132
п.7.9. Метод инверсии.....	138
п.7.10. Алгебраический метод.....	144
§8. Задачи для самостоятельного решения .....	159
Литература .....	199

*Светлой памяти моей бабушки  
Екатерины Федоровны посвящаю  
эту книгу.*

## **ВВЕДЕНИЕ**

Центральным видом учебной деятельности, в процессе которой учащиеся усваивают математические теории, у них развиваются самостоятельность мышления и творческие способности, является решение задач.

В школьном курсе геометрии по характеру требований можно выделить такие задачи:

- задачи на вычисление;
- задачи на доказательство;
- задачи на построение;
- задачи комбинированного характера.

В данной работе целью исследования являются задачи на построение и процесс обучения учащихся решению этих задач. Задачи на построение представляют собой частный вид класса графических задач, а раз так, то мы дадим читателю возможность взглянуть на исследуемую проблему с общих позиций – с позиции задач на графическое изображение.

Решение различных графических задач является органической частью обучения всем учебным предметам, особенно предметам естественно-математического цикла. В таких задачах графическое изображение может выступать в разном качестве:

- а) графическое изображение выступает в качестве наглядности;
- б) графическое изображение выступает в качестве знаковых пространственных моделей, сохраняющих разную степень подобия с реальными объектами;
- в) графическое изображение выступает в роли знаковых символических обозначений, позволяющих устанавливать связи объектов и модели-

ровать процессы и явления, не поддающиеся непосредственному наблюдению;

г) графическое изображение выступает в качестве решения задачи (сюда как раз и относятся задачи на построение).

А.Д.Ботвинниковым [8] предложена теоретическая модель классификации графических задач, которая позволяет строить всю гамму специально-предметного содержания задач с учетом общелогических и психологических требований к условиям формирования обобщенных действий, необходимых для их решения. Эта классификация приведена в таблице 1.

Таблица 1

**Виды задач**

Типы	Классы	Виды	Содержание задач
I	1	а	Узнавание и отбор объектов по изображению или изображения по объекту
		б	Контроль объекта по его изображению
	2	а	Подбор материальных средств, необходимых для создания объектов
		б	Моделирование объекта по его изображению
	3	а	Выполнение рисунков, эскизов и абрисов
		б	Графическое отображение процесса изготовления объекта
II	4	а	Словесный анализ геометрического состава изображений
		б	Сравнение словесного описания объекта с заданным изображением
		в	Сравнение изображений, выполненных разными методами проектирования
	5	а	Задания на формирование приемов создания образа по изображению
		б	Чтение изображений

Типы	Классы	Виды	Содержание задач
------	--------	------	------------------

II	6	а	Задачи на формирование приемов изображения по словесному описанию объекта
		б	Выполнение изображений по словесному описанию
		в	Задачи с элементами конструирования
	7	а	"Репродуцирование" изображений
		б	"Репродуцирование" изображений с изменением их масштаба
		в	"Репродуцирование" изображений с геометрическими построениями
III	8	а	Дополнение геометрических элементов изображений или их проекций
		б	Дополнение данных изображений или их количества
		в	Упрощение изображений
	9	а	Изменение положения геометрических элементов изображений и их преобразование
		б	Построение изображения с изменением метода проектирования
		в	Выявление внутреннего строения объекта
	10	а	Изменение положения изображаемых объектов или их частей в пространстве
		б	Расчленение изображаемого объекта на составляющие его части
	11	а	Изображение объектов с изменением формы и размеров их частей
		б	Взаимное согласование формы и размеров изображаемых объектов
	Типы	Классы	Виды

Ш	12	а	Изображение объектов, детали которых находятся в статически определенном положении
		б	Изображение объектов, детали которых взаимодействуют в определенных условиях

Конечно, предложенная А.Д.Ботвинниковым классификация полного воплощения в школьной практике обучения пока еще не имеет места. Так, например, задачи таких видов как 1б, 3б, 4а, 4в, 5а, 11а, 11б еще в практику обучения не введены или же введены только эпизодически.

Приведенный выше разговор о графических задачах в большей степени нужен читателю для того, чтобы иметь более полную ориентацию в вопросе об обучении учащихся построению сечений многогранников, которые также относятся к задачам на построение.

Задачи на построение - это задачи, решаемые различными инструментами (линейка, циркуль и т.д.), которые предполагаются абсолютно точными. В зависимости от выбора инструментов определяется цикл задач, которые могут быть разрешены этими средствами. Основным набором инструментов для решения задач на построение являются циркуль и линейка.

Любая задача на построение, разрешаемая при помощи циркуля и линейки, может быть решена при помощи и других наборов инструментов: одним циркулем; линейкой с двумя параллельными краями, которая может быть заменена угольником; линейкой и окружностью, заданной в плоскости чертежа с отмеченным центром.

В данной работе мы рассматриваем задачи на построение, которые будут решаться циркулем и линейкой. Это мы делаем по той лишь причине, что в школьном курсе геометрии обычно рассматриваются такие задачи.

Укажем основные построения, которые допускают циркуль и линейка.

- 1) Построение прямой, проходящей через две данные точки.
- 2) Построение окружности с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.
- 3) Построение точки пересечения двух данных непараллельных прямых.
- 4) Построение точки пересечения данной окружности и данной прямой, если они существуют.
- 5) Построение точек пересечения двух данных окружностей, если они существуют.

Обращаем внимание читателя на очень важный момент - критерий разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Прежде чем сформулировать этот критерий, укажем, что основными операциями над длинами отрезков являются следующие: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня.

Пусть требуется построить с помощью циркуля и линейки отрезок длины  $x$ , которая выражается через длины отрезков  $a, b, \dots, l$  формулой  $x = f(a, b, \dots, l)$  (заметим, что отрезки  $a, b, \dots, l$  имеют одинаковые единицы измерения).

Критерий разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки: Для того чтобы циркулем и линейкой можно было построить отрезок, длина которого является заданной положительной функцией длин данных отрезков, необходимо и достаточно, чтобы длину искомого отрезка можно было бы выразить через длины отрезков при помощи конечного числа основных операций.

Так, например, с помощью циркуля и линейки можно построить отрезки, длины которых заданы такими формулами:  $\frac{2\sqrt{a \cdot b}}{a + b}$ ;  $\sqrt{ab + cd}$  и т.д. Но с помощью циркуля и линейки нельзя построить отрезки, длины которых заданы, например, следующими формулами:  $\sqrt[3]{a + b}$ ;  $\sqrt[2]{a^3 b^3}$ ;  $\pi + 3ab$

(эта последняя задача не разрешима, так как  $\pi$  не является числом алгебраическим, оно число трансцендентное: число трансцендентно, если оно не является корнем ни одного алгебраического уравнения с целыми коэффициентами).

Классическими задачами, не разрешимых циркулем и линейкой, являются следующие три:

а) Дан круг; построить с помощью циркуля и линейки квадрат, равновеликий этому кругу.

б) Задан куб (длиной своего ребра). Построить с помощью циркуля и линейки другой куб (то есть его ребро), объем которого вдвое больше объема данного куба.

в) Дан угол; разделить с помощью циркуля и линейки этот угол на три равные части (или иначе: построить угол в три раза меньший данного).

Если задача касается построения с помощью циркуля и линейки точки, то критерий разрешимости будет формулироваться так: "Задача на построение точки с помощью циркуля и линейки разрешима тогда и только тогда, когда координаты искомой точки могут быть записаны в виде выражений, содержащих конечное число основных операций (сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня), примененных к координатам заданных точек.