В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

НАЧАЛА КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Омск – 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный педагогический университет»

В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

НАЧАЛА КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Омск – 2015

ББК 22.161.55я73
Д.152

Печатается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

Д152. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Начала комплексного анализа: учебное пособие. – Омск: Изд-во ООО «Амфора», 2015. – 140 с., 19 ил.

ISBN 976-5-906706-46-1

Данное учебное пособие предназначено для студентов очных и заочных отделений математических факультетов педвузов. Его цель состоит в том, чтобы оказать помощь обучающимся при изучении дисциплины «Теория функций комплексного переменного». В условиях ограниченного количества часов на эту дисциплину пособие будет полезным при самостоятельной работе студентов.

ББК 22.161.55я73

ISBN 976-5-906706-46-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Когда-то в педагогических институтах теория функций комплексного переменного (в дальнейшем сокращенно ТФКП) изучалась в заключительном разделе курса математического анализа. Но затем ТФКП выделилась в самостоятельную дисциплину на старших курсах. Это сделано с целью углубить у будущих учителей математики знания о комплексных числах, об основных элементарных функциях, изучаемых в средней школе. Так, роль комплексных чисел ярко проявляется на примере доказательства основной теоремы алгебры и определения области сходимости ряда Тейлора данной функции.

Обстоятельный анализ свойств действительнозначных функций часто можно объяснить выходом в комплексную область. Например, функция $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ бесконечно дифференцируема на всей действительной оси, а ее ряд Тейлора $1-x^2+x^4-...$ перестает сходиться при $x=\pm1$. Причину этого трудно понять, оставаясь в действительной области: ведь эти точки ничем не примечательны для рассматриваемой функции. Но выход в комплексную область сразу разъясняет явление: на окружности единичного радиуса с центром в начале координат $|z|=1$ лежат особые точки $z=\pm i$, в которых функция $f(z)=\left(1+z^2\right)^{-1}$ обращается в бесконечность. Из-за этого ряд $1-z^2+z^4-...$ перестает сходиться.

Другой пример: пусть в R задана функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} \; при \; x\neq 0\\ 1 \; при \; x=0\end{cases}.$$

Исследования, связанные с числами Бернулли, показали, что радиус сходимости ряда

$$f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^{n-1}+...}=1+\sum_{n\geq1}a_nx^n$$

равен 2π (см. об этом, например, пособие [14], стр. 494-497). Но почему? Этот факт трудно получить методами действительного анализа, но его можно легко получить выходом в комплексную область: у функции

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

среди особых точек $z = 2\pi k i \ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ближайшей к центру степенного ряда $z_0 = 0$ является точка $z = 2\pi i$, ее расстояние до центра как раз и равно 2π. Но радиус сходимости и равен этому расстоянию.

Переход к рассмотрению функций комплексного переменного необходим во многих вопросах. Например, он дает возможность глубже изучить элементарные функции и установить интересные связи между ними. Так, тригонометрические функции оказываются простыми комбинациями комплексных экспонент, например, при $x \in R$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi}).$$

Выявляются такие неожиданные и замечательные соотношения между действительными и мнимыми величинами, как, скажем,

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k} \quad (k \in Z).$$

В действительном анализе стройная теория развивается лишь для однозначных функций, а многозначные часто доставляют много неприятностей. В комплексном анализе удается выяснить природу многозначности и построить безупречную теорию многозначных функций. Но в данном пособии эта теория не рассматривается, мы ограничились лишь небольшим числом конкретных примеров.

Несмотря на свою кажущуюся абстрактность, ТФКП (комплексный анализ) нашла (нашел) обширные практические приложения. С ее (его) помощью решаются многие вопросы картографии, теории упругости, гидродинамики. Аналитические функции применяются для решения проблем квантовой теории, при изучении движения естественных и искусственных небесных тел и т.д.

Но наряду с практическими приложениями ТФКП используется при решении теоретических проблем математики (исследования решений некоторых типов дифференциальных уравнений, в операционном исчислении, в теории чисел, при вычислениях определенных интегралов, при получении асимптотических оценок и т.д.). В комплексном анализе сочетаются аналитические и геометрические методы. Его понятия служат моделями во многих исследованиях в функциональном анализе, алгебре, топологии и в других разделах математики.

Начальные идеи комплексного анализа возникли во времена, связанные прежде всего с именем Эйлера. Основной массив анализа был создан трудами Коши, Римана и Вейерштрасса в 19-м веке. В наши дни ТФКП одного переменного приобрела уже вполне законченный вид. В более молодой части – теории функций нескольких комплексных переменных – имеется много нерешенных задач. Однако эта часть комплексного анализа в данном пособии не рассматривается. Заинтересованный читатель найдет соответствующий материал во второй части пособия Б.В. Шабата [16].

Заметим, что литература по ТФКП довольно обширная. Основной ее массив приходится на 60-80 годы прошлого столетия. В настоящее время многие источники тех лет издаются как стереотипные. Например, в 2009 году в издательстве «Лань» стереотипно 15-м изданием вышло знаменитое пособие [11] в списке предлагаемой здесь литературы. Заметим, что этот список здесь намеренно составлен небольшим по объему; ведь в указанных источниках можно найти ссылки на другие многочисленные работы.

Множество учебных пособий по ТФКП (или, что почти одно и то же, по теории аналитических функций) можно с некоторой условностью разбить на три класса.

1. Пособия для профессиональных математиков. Это, например, работы [1,4,5,6,9,11,12,16].

2. Пособия для будущих специалистов-прикладников, использующих методы ТФКП в картографии, аэродинамике, теории упругости и т.д.Это, например, работы [5,8,10,12,13].

3. Учебные пособия, написанные специально для будущих учителей математики. Среди них отметим, например, работы [2,3,9,11,15], и этот список можно было бы продолжить. В связи с этим возникают следующие вопросы.

Из каких соображений, на каких основаниях написано предлагаемое учебное пособие? Ведь указанных выше источников при изучении ТФКП вполне достаточно. В чем отличие, преимущества или недостатки данного пособия от предыдущих?

Пособие задумано небольшим по объему. Студенты педвузов знакомятся с комплексными числами еще на младших курсах, поэтому они здесь не изучаются систематически, а лишь напоминаются. В курсе математического анализа изучается понятие метрического пространства и его топология. Комплексная плоскость является частным случаем метрического пространства, поэтому такие понятия, как предельная точка, непрерывность и т.д. здесь лишь демонстрируются на примерах. Используется ныне современный общепринятый термин «голоморфная функция». Основной результат в комплексном анализе состоит в том, что класс функций, голоморфных в данной области комплексной плоскости, совпадает с классом функций, аналитических в этой области. Как и в пособиях [2, 15] этот фундаментальный результат устанавливается в предположении, что у голоморфной функции производная непрерывна. Оказывается (и это показал Гурса), что такой частный случай не умаляет общности. В связи с этим вспоминаются советы Д. Пойа из его книги «Как решать задачу». «… Одним словом, неполные доказательства могут быть использованы как мнемотехнический прием, но, конечно, не как заменители полных доказательств, когда наша цель – дать достаточно связное изложение и когда не требуется строгая логическая последовательность изложения. Если доказательство неполное, то это надо каким-то образом отметить».

Сходства и различия комплексного и действительного анализов авторы старались по возможности приводить. Использовались следующие общепринятые обозначения: N, Z, R, C – соответственно множества чисел натуральных, целых, действительных и комплексных.