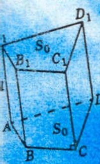
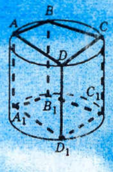
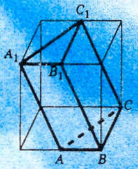
В.А.Далингер

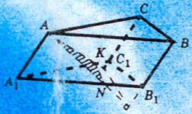
Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач

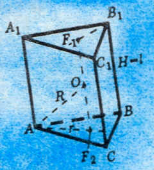


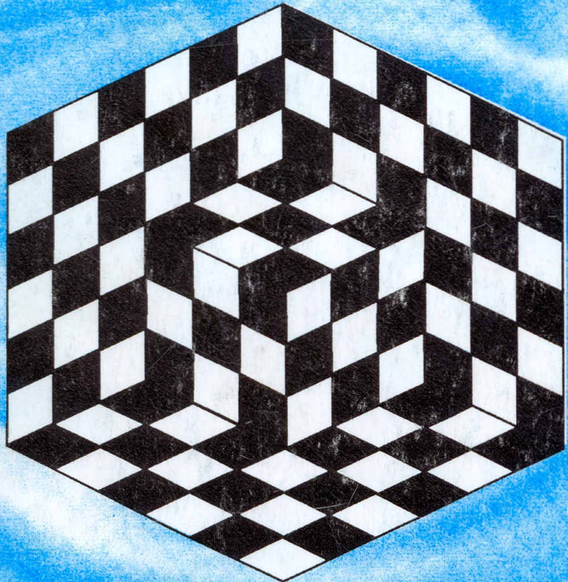


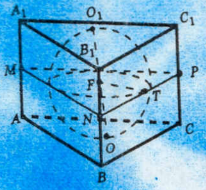


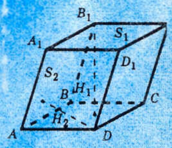
$S_{бок} = P_o \cdot H$
$S_{полн} = S_{бок} + 2 \cdot S_o$

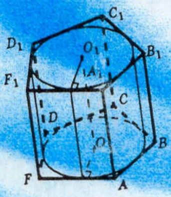


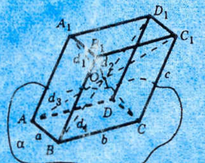












Печатается по постановлению учебно-методического объединения высших учебных заведений Российской федерации по педагогическому образованию на базе МПГУ (протокол №1 от 13.02.2001 г.)

ББК 74. 262

ДАЛИНГЕР В.А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. – с. 365, – ил. 249, – таб. 21.

ISBN 8-8568-0521-8

Данное учебное пособие, которое представляет собой практико-ориентированную монографию, предназначено студентам математических факультетов педагогических вузов, а также для учителей математики общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, СПОУ. В нем рассмотрены как теоретические, так и практические основы обучения учащихся стереометрии через решение задач: проанализированы психолого-педагогические и дидактико-методические особенности обучения стереометрии, роль и место задач в обучении, методика формирования пространственных представлений, общие и частные приемы решения стереометрических задач, показана роль логической реорганизации теоретического материала, учебных исследований и аналитико-синтетической деятельности в обучении учащихся решению задач.

Работа опубликована при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант по результатам проведения конкурса 2000 года по фундаментальным исследованиям в области гуманитарных наук – ГОО-2.2-46.

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..4
§1. Психолого-педагогические и дидактико-методические особенности обучения учащихся стереометрии...............13
§2. Методика формирования пространственных представлений у учащихся при обучении стереометрии...........................33
§3. Задачи и их функции в обучении 76
§4. Некоторые методические требования к системе задач.................98
§5. Различные классификации стереометрических задач..................103
§6. Роль и место устных упражнений в системе развивающего обучения стереометрии 135
§7. Методика использования учебных исследований при обучении стереометрии 152
§8. Приемы учебной деятельности, способствующие формированию у учащихся умения решать стереометрические задачи 198
§9. Частные методы решения стереометрических задач 243
§10. Обучение учащихся решению стереометрических задач посредством логической реорганизации теоретического материала..307
§11. Аналитико-синтетический метод в обучении учащихся решению стереометрических задач 315
§12. Словарь геометрических терминов..326
ЛИТЕРАТУРА 356

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой усваивается система математических знаний, умений и навыков, является решение задач.

Достижение таких качеств усвоения учащимися содержания математического образования как осознанность, прочность, глубина, системность, обобщенность, возможно лишь при реализации деятельностного подхода в обучении.

В психологических исследованиях показано, что задача – важнейшее средство формирования системы знаний у учащихся, развития их мышления, обучения их действиям по самостоятельному приобретению знаний.

Для того, чтобы математические понятия, теоремы, законы, правила стали бы предметом учебной деятельности школьников, необходимо представить их в виде задач, которые бы направляли и стимулировали активность учащихся. Г.И. Саранцев в связи с этим отмечает, что задача - «многоаспектное явление обучения, занимающее большое место в учебном процессе и выступающее способом организации и управления учебно-познавательной деятельности учащихся, носителем действий, адекватных содержанию обучения математике, средством целенаправленного формирования знаний, умений и навыков, одной из форм методов обучения, средством связи теории с практикой» [94, с.5].

Умение решать задачи является надежным критерием осознанного и творческого овладения учащимися знаниями, умениями и навыками.

Анализ школьной практики показывает, что многие учащиеся имеют формальные знания по геометрии, испытывают значительные затруднения при решении задач и, в частности, стереометрических.

Они недостаточно владеют различными методами решения простейших задач, затрудняются в выборе эффективного метода решения. Особое неудовлетворение вызывают результаты проверки знаний, которые показывают абитуриенты при решении задач по стереометрии на вступительных экзаменах в высшие и средние специальные учебные заведения.

Приведем некоторые количественные и качественные характеристики, указывающие на низкий уровень сформированности у учащихся умения решать стереометрические задачи.

1) В 1966 г. на математический факультет Омского госпединститута было подано 466 заявлений от абитуриентов [37]. На письменном экзамене из пяти задач в билете одна была по стереометрии (по счету это была вторая задача в билете). Для примера приведем одну из них: «Площадь плоского сечения, проходящего через вершину правильной четырехугольной пирамиды и диагональ основания, равна Q. Боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом α. Определите объем пирамиды».

Абитуриенты получили следующие оценки по решению стереометрической задачи: «5» – 3,2%; «4» – 10,1%; «3» – 19,6%, «2» – 55,0%; вообще не приступали к решению – 12,2%.

При решении стереометрической задачи бóльшая часть абитуриентов допускала ошибки в выполнении чертежа, главным образом из-за слабо развитых пространственных представлений. Абитуриенты смешивали угол между гранью пирамиды и плоскостью основания с углом, который образует ребро пирамиды с плоскостью основания или ребра пирамиды со стороной основания.

2) В 1982 г. на вступительных экзаменах на математический факультета в Омский techпединститут со стереометрической задачей на письменном экзамене справилось лишь 18,9% (!) абитуриентов. Приведем задачи, предлагавшиеся на экзамене:

а) объем конуса равен V, а угол наклона образующей к основанию равен β. Найти площадь полной поверхности конуса;

б) через сторону a нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро и наклоненная к плоскости основания под углом α. Найти площадь боковой поверхности образовавшейся при этом призмы;

в) основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция с острым углом α и боковой стороной 6, равной меньшему основанию. Определить объем призмы, если угол между диагональю призмы и плоскостью основания равен $\frac{\alpha}{2}$.

3) В апреле 1987 г. учащимся X классов (по новой нумерации XI класс) Омской области была предложена контрольная работа по геометрии, рассчитанная на 2 часа. Приведем текст одного варианта этой работы.

Задача 1. Дана правильная шестиугольная призма $ABCD\ldots F_1$ (рис. 1). Установите взаимное расположение указанных в таблице прямых и плоскостей, определяемых соответствующими элементами призмы, при этом в клетках а, б, …, е (таблица 1) запишите ответ словами: параллельны, скрещиваются, принадлежат, пересекаются и перпендикулярны.

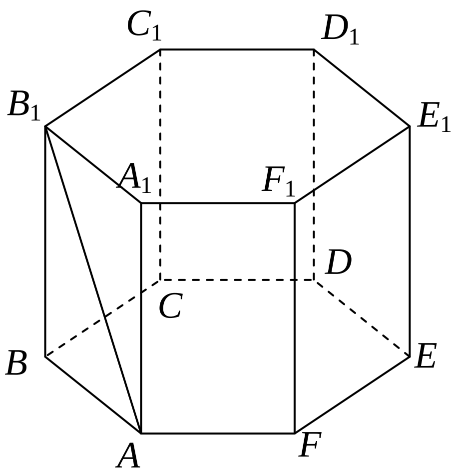


Рис. 1

Таблица 1

Элементы призмы	AB_1	DE	$ABCDEF$
DD_1	а)	б)	в)
AA_1B_1B	г)	д)	е)

Задача 2. Точка A принадлежит плоскости α, точки B и C принадлежат этой же плоскости. Наклонные AB и BC образуют с плоскостью α соответственно углы в 40° и 50°:

а) сделайте и опишите рисунок по условию задачи;

б) какой из отрезков – AB или AC – имеет бо́льшую длину?

в) дайте обоснование ответа.

Задача 3. MK – высота треугольной пирамиды $MABC$, MN – высота боковой грани, проведенная к стороне BC, $\angle KMN = 40°$:

а) найдите величину угла между плоскостью BCM и плоскостью основания;

б) докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости KMN.

Задача 4. Высота конуса равна 5 см. Секущая плоскость проходит через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 120°. Найдите полную поверхность конуса, если плоскость сечения составляет с плоскостью основания конуса угол в 30°.

Приведем поэлементный анализ выполнения 595 учащимися этой контрольной работы (табл. 2).

Таблица 2.

№ задачи	Пункты схемы анализа	Процент учащихся, верно выполнивших задание (%)
1	Верно заполнили всю таблицу	89,1
2	а) Верно выполнен рисунок б) Утверждается, что $AB > AC$ в) Дано верное обоснование этого утверждения	73 76 45
3	а) Верно указали линейный угол искомого двугранного угла б) Верно обосновали положение линейного угла в) По заданию «а» дан верный ответ г) Дано верное обоснование по заданию «б»	81 46 83 53
4	а) Верно построили чертеж б) Верно описали дополнительное построение в) Верно указали линейный угол двугранного угла между плоскостью основания и плоскостью сечения г) Верно обосновано положение линейного угла двугранного угла д) Верно найден радиус основания конуса	68 23 53 17 44

№ задачи	Пункты схемы анализа	Процент учащихся, верно выполнивших задание (%)
	е) Верно найдена образующая конуса	37
	ж) Верно записана формула площади полной поверхности конуса	65
	з) Верно записаны необходимые преобразования и вычисления	33
	и) Дан правильный ответ	30

4) В 1990 г. В мае студентам I и V курсов математического факультета Омского пединститута Союзным учебно-методическим объединением по математике и проблемам средней школы была предложена контрольная работа, состоящая из 6 задач и рассчитанная на 4 астрономических часа. Работа содержала задачи на исследование функций, решение уравнений, неравенств и их систем, разложение многочленов на множители, стереометрическую задачу. В плане нашего исследования интерес представляет последняя задача. Приведем некоторые из них:

а) полная поверхность конуса равна S, угол между образующей и высотой равен α. Найти поверхность шара, вписанного в конус;

б) объем конуса равен V, образующая составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем шара, вписанного в конус;

в) найти объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна h, а все плоские углы при вершине пирамиды равны 60°;

г) боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

Результаты выполнения этих задач оказались следующими:

на I курсе – 25% студентов справились с задачей;

на V курсе – 36,5% студентов справились с задачей.

5) В 1999 году на математическом факультете Омского госпедуниверситета на письменных вступительных экзаменах в числе других

задач были предложены и стереометрические. Приведем некоторые из них:

а) в правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно d и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти объем пирамиды;

б) основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q. Через диагонали основания проведены вертикальные сечения, их площади S_1 и S_2. Найдите объем параллелепипеда;

в) плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды равны 90°, площадь основания пирамиды равна 2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды;

г) основанием четырехугольной пирамиды является прямоугольник, диагонали которого равны 6 см и пересекаются под углом 60°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды.

Из всех поступавших, а их было 325 человек, 75 человек зачислено на факультет по результатам конкурса. Анализ результатов письменного экзамена лишь тех, кто выдержал конкурс, показал, что со стереометрической задачей справилось лишь 48% абитуриентов, 20% - либо вообще не приступали к ее решению, либо ее не решили, 32% - допустили в решении грубейшие ошибки.

Если к этому анализу подключить работы тех абитуриентов, которые не выдержали конкурса, или же получили на экзамене неудовлетворительную оценку, то картина была бы еще более удручающей, и это все при условии, что сами задачи несложны.

Анализ контрольных работ учащихся и результатов вступительных экзаменов позволил выявить наиболее типичные ошибки, допускаемые при решении стереометрических задач. Укажем эти ошибки:

- учащиеся не знают формулировок теорем и не умеют их применять к решению задач, особенно к курсу планиметрии;
- не знают, что является центром вписанной и описанной окружностей;

- не умеют выполнять дополнительные построения, особенно во внешней области фигуры;
- не умеют правильно изображать объемные фигуры на плоскости;
- не знают свойств пирамиды с равнонаклоненными к основанию ребрами (основание высоты пирамиды – центр описанной около основания окружности), с равнонаклоненными к основанию гранями (основание высоты пирамиды – центр окружности, вписанной в основание);
- в основе большинства ошибок по стереометрии лежит незнание вопросов о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве (особенно вопрос об угле между прямой и плоскостью и вопрос об угле между плоскостями);
- не умеют применять тригонометрию к решению стереометрических задач;
- не умеют строить сечения многогранников и тел вращения;
- отсутствуют навыки изображения видимых и невидимых элементов фигуры;
- часто производят ошибочный поиск точки пересечения скрещивающихся прямых;
- не сформировано умение целесообразно располагать фигуру на чертеже;
- при изображении геометрического тела стремятся подражать иллюстрациям учебника и чертежам, предложены учителем, но испытывают большие трудности при изображении объемной фигуры в новых условиях;
- не умеют строить линию пересечения плоскостей, отыскать проекцию точки на прямую и плоскость, прямой на плоскость;
- слабо развиты пространственные представления, особенно в случае вписанных и описанных многогранников и тел вращения.

Причины низкого уровня сформированности у учащихся умения решать задачи вообще и стереометрические в частности можно разделить на три группы:

1) Причины, связанные с психологическими факторами (ослабление психических функций: внимания, памяти, мышления).

2) Причины, вытекающие из недостатков учебных программ и учебников.

3) Причины, обусловленные несовершенством организации учебного процесса.

Детализируя некоторые из этих причин, можно отметить следующее:

- роль задач в учебном процессе учителем понимается в узком смысле;
- количество решенных задач идет в ущерб обучающему эффекту;
- усиленное внимание к оформлению решения, а не к процессу решения задачи;
- в учебном процессе преобладает решение задач по образцу;
- канонизируются приемы коллективного решения задач;
- задачи преимущественно используются для закрепления готовых знаний или для их повторения;
- в учебном процессе используются лишь готовые задачи; учащихся не учат составлять задачи;
- задачи используются для контроля предметных знаний, умений и навыков, а не для диагностики уровня математического развития у учащихся;
- в процессе решения задачи в абсолютном большинстве случаев организуется синтетическая деятельность учащихся, а не аналитико-синтетическая;
- в учебниках недостаточно задач, решение которых эффективно формирует у школьников важнейшие мыслительные операции;

- школьные курсы страдают однообразием типологии задач;
- в системе задач не выдержано оптимальное сочетание задач, решение которых требует репродуктивной и продуктивной деятельности;
- отсутствуют задачи, помогающие учащимся осознать способ решения (рефлексивные задачи);
- в системе задач не обеспечено постепенное возрастание сложности задач;
- в учебниках преобладает единообразие форм предъявления задач;
- в учебниках недостает варьирования содержания задач, при сохранении метода их решения;
- имеет место большое число повторов задач одной и той же структуры, особенно на структуры малой сложности, что приводит к снижению интереса учащихся к решению задач;
- предлагаемые в системе задач подсистемы не обладают свойством структурной полноты и т.д.

В данной работе мы предлагаем апробированную на практике методику формирования у учащихся умения решать стереометрические задачи. Заметим, что многие рекомендации могут быть использованы и при обучении учащихся решению других задач.