

*В. А. Далингер*

**КОГНИТИВНО-ВИЗУАЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ  
ПРИ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ  
ВНУТРИПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ**

Омск – 2019

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Омский государственный педагогический университет»

*В. А. Далингер*

**КОГНИТИВНО-ВИЗУАЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ  
ПРИ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ  
ВНУТРИПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ**

*Учебное пособие*

Омск – 2019

**ББК 74. 262**  
**Д 152**

Печатается по решению редакционно-издательского  
совета ФГБОУ ВО «Омский государственный  
педагогический университет»

**Д 152. Далингер В. А. Когнитивно-визуальная деятельность при решении математических задач как средство реализации внутрипредметных связей. – Омск: Изд-во ООО «Амфора», 2019. – 195 с.**

**ISBN 978-5-906985-74-3**

В данной работе излагается сущность когнитивно-визуального подхода к обучению математике, указываются функции внутрипредметных связей в организации системных знаний и в синтезе наук. Концепция автора сопровождается достаточно большим количеством иллюстративных примеров, снабженных подробными решениями, и задачами для самостоятельной работы. Пособие предназначено для студентов младших курсов математических факультетов педвузов. Оно вполне доступно школьникам старших классов, может быть полезным в практической работе учителей и преподавателей математики.

**ББК 74. 262**

© В. А. Далингер, 2019

**ISBN 978-5-906985-74-3**

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
Глава 1. Внутрипредметные связи и их сущность .....	7
Глава 2. Когнитивно-визуальный подход и его особенности в обучении математике.....	20
Глава 3. Встанем на геометрическую точку зрения .....	42
Глава 4. Решение геометрических задач аналитическим методом .....	53
Глава 5. Применения производной .....	66
Глава 6. Применения интеграла .....	79
Глава 7. Рекуррентные соотношения. Итерации .....	93
Глава 8. Метод неопределенных коэффициентов .....	112
Глава 9. Привлекаем комплексные числа .....	121
Глава 10. Графики в решении текстовых задач .....	133
Глава 11. Компьютер помогает решить задачу .....	138
Глава 12. Решения задач .....	151
Литература.....	191

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно, «братьям нашим меньшим» основную информацию дает обоняние. В отличие от них, человеку основной объем информации (до 90 процентов) дает зрение, глаз можно по праву назвать его главным органом чувств. В многочисленных исследованиях физиологов показано, что нервный аппарат глаза – это часть мозга в самом буквальном смысле. «Разумный глаз» видит мир как бы сквозь систему нервных процессов, непрерывно протекающих в мозгу. Разумность глаза состоит в том, что зрение способно проникать в невидимую суть видимых вещей, оно часто позволяет узнавать качества предметов, мало доступных чувствам, но известных разуму. Не случайно во многих языках глаголы «видеть» и «понимать» являются синонимами. По-видимому, в любом процессе обучения, в частности, математике, визуализация играет главенствующую роль; при этом под визуализацией понимается представление информации в виде оптического изображения (рисунки, фотографии, диаграммы, таблицы, графики и т.д.). Не удивительно поэтому, что в учебных пособиях, грамотно написанных с педагогической точки зрения, отдается приоритет когнитивно-визуальному подходу к обучению математике, основу которого составляют зрительные образы. Увы, таких пособий не так уж много, визуальные доказательства больше присущи научно-популярной литературе. Преподавателю следует восполнять этот недостаток, предлагая учащимся задачи, подобные описанным в данной работе. Следует придерживаться такой методики, которая формировала бы у учащегося визуальное мышление – умение переходить к зрительным образам, используя тем самым познавательную функцию наглядности. Умение «видеть» графики, применять их при решении уравнений и неравенств, при исследовании свойств функций всегда было важным элементом математического образования, развитие навыков «графического» мышления – одна из главных задач школьного курса математики.

В данной работе представлено достаточно большое число примеров и задач по различным разделам школьной и вузовской математики, решение

которых строится на когнитивно-визуальном подходе. С другой стороны, особого внимания заслуживает проблема реализации внутрипредметных и межпредметных связей посредством систем задач. При этом под внутрипредметными связями понимаются всевозможные отношения между понятиями и их свойствами в рамках одного предмета (например, в рамках алгебры), межпредметные связи выражают объективно существующие связи между различными учебными дисциплинами (например, между физикой и геометрией).

Достоинства и недостатки учебных пособий по математике (как школьных, так и вузовских) давно отмечались и критиковались. В них большинство задач мало связаны между собой: они служат для иллюстрации и закрепления какого-то одного правила, чтобы «набить руку» в его применении. В противоположность им, поисковые задачи, вроде олимпиадных, имеют глубокий подтекст. В них часто отражены межпредметные связи, они порождают поучительные вопросы, из которых в свою очередь возникают новые интересные задачи. Решая их, приходится прибегать к правдоподобным рассуждениям, догадке. Но чаще всего в обучении на угадывание наложен запрет. Тогда как в любом научном исследовании, в том числе математическом, как писал Д. Пойа, «Сначала угадайте, а потом докажите!» – это почти правило.

В своей «Всеобщей арифметике» И. Ньютон отмечал: «Я занимался до сих пор решением ряда задач, ибо при изучении наук примеры полезнее правил». Согласно Д. Пойа, лучший способ изучить – это открыть самому. По воспоминаниям академика И.М. Гельфанда он, будучи еще подростком, путем самообразования, решал конкретные задачи. Так он открыл для себя все пифагоровы тройки, нашел формулу Эйлера-Маклорена, производящую функцию для чисел Бернулли и еще ряд результатов классиков математики. Став маститым ученым, он говорил своим ученикам: «Теории приходят и уходят, а задачи остаются». И снова Д. Пойа: «Если вы хотите плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их».

Решение учащимися предлагаемых задач послужило бы средством формирования навыков самостоятельной деятельности. Пусть это – работа по аналогии или образцу, но ведь и она требует переноса известного способа решения задачи в аналогичную или отдаленно аналогичную ситуацию. Заметим, что ситуация часто имеет межпредметный характер, когда лишний раз убеждаемся в условности границ, отделяющих, например, анализ от геометрии.

Как говорил Шерлок Холмс, «... всякая задача кажется очень простой после того, как вам ее растолкуют». Поэтому совет читателю: если не удастся решить задачу сразу, не спешите смотреть решение. Если с задачей справились сами, сравните ваше решение с авторским. Иногда заметите пробел в своем решении или недостаток в авторском, узнаете о связях задачи с другими интересными вопросами, найдете ссылки на доступную литературу и т.п. Успехов в работе!

## ГЛАВА 1. ВНУТРИПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ И ИХ СУЩНОСТЬ

До настоящего времени содержание школьного образования главным образом нацеливалось на усвоение знаний, умений и навыков, а не на развитие личности. Это явилось следствием традиционного информационно-объяснительного подхода к построению содержания образования, когда большой удельный вес знаний дается в готовом виде учителем без опоры на самостоятельную работу учащихся. Это привело к таким негативным последствиям, как отождествление всестороннего гармонического развития личности с ее всесторонней образованностью, примату информированности личности над ее культурой, рационально-логической стороны познания над чувственно-эмоциональной.

Основной недостаток традиционной системы обучения состоит в том, что учителя реализует чаще всего лишь одну функцию знаний – информативную, оставляя в стороне другую, не менее значимую, развивающую. Эти две функции тесно взаимосвязаны, но они не тождественны.

Развивающая функция обучения требует от учителя не простого изложения знаний в определенной системе, а предполагает также учить школьников мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже известные. Учащихся надо целенаправленно учить познавательной деятельности, вооружать их учебно-познавательным аппаратом. Уместно в связи с этим привести слова французского философа М. Монтеня: «Мозг хорошо устроенный стоит больше, чем мозг хорошо наполненный».

Разница между способным учеником и слабоуспевающим состоит не в том, что первый больше знает, а именно в том, что он владеет более богатым арсеналом различных приемов и способов получения знаний. Но технология процесса обучения, используемая нынче в школе значительной частью учителей, такие способности ученика развивает крайне мало, и если даже у некоторых учащихся эти способности совершенствуются, то происходит это скорее вопреки, чем благодаря такой технологии.



Сейчас в школе обучение в значительной степени строится по формуле: «Усвоение = Понимание + Запоминание», в основу же должна быть положена следующая формула: «Овладение = Усвоение + Применение знаний на практике», которая в полном объеме реализуется в процессе восприятия, осмысления, запоминания, применения, обобщения и систематизации.

Под знаниями в педагогике понимают не любую информацию, а лишь ту, которая обретает системное качество, вводящее ее в содержательные связи с другими знаниями. Поскольку все в реальном мире системно, взаимообусловлено и взаимосвязано, то и знания, описывающие многообразие форм этого мира, должны быть системными. Овладение определенной системой знаний является и средством, и целью по отношению к развитию личности школьника. Первостепенное значение в формировании системы знаний играют внутрипредметные связи, без них учащиеся при изучении того или иного учебного предмета получают лишь базу данных: изучаемый учебный курс предстает перед школьниками в качестве базы знаний только при условии установления в нем логико-содержательных и структурно-функциональных связей. Множество знаний перерастает в систему знаний лишь в случае организации специальной работы по установлению связей и отношений между различными элементами знаний.

В настоящее время зачастую знания учеников не достигают определенной степени системности, наблюдается слабое знание основных положений курса математики, неумение отделить главное от второстепенного, обнаруживается формализм в знаниях учащихся, школьники часто не осознают эквивалентности различных способов выражения одной и той же информации. Как показал анализ школьной практики обучения математике, перечисленные недостатки обусловлены тем, что в курсах математики представлен материал, недостаточным образом связанный между собой, а также отсутствует целенаправленная и систематическая работа по реализации внутрипредметных связей в учебном процессе.