

74.262.21

А 152

В.А. ДАЛИНГЕР

Обучение учащихся
доказательству теорем

Печатается по постановлению учебно-методического объединения высших учебных заведений Российской Федерации по педагогическому образованию на базе МПГУ (протокол №1 от 13.02.2001 г.)

ББК 74. 262

ДАЛИНГЕР В.А. Обучение учащихся доказательству теорем: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002. – с. 419, – ил. 365, – таб. 29.

ISBN 5-8268-0575-7

Данная работа представляет собой практико-ориентированную монографию и предназначена студентам физико-математических факультетов педагогических вузов, а также учителям математики средних общеобразовательных школ, гимназий, лицеев. В ней рассмотрены как теоретические, так и практические основы обучения учащихся доказательству математических предложений.

Раскрыт категориально-понятийный аппарат, относящийся к понятию теорема, показаны ее различные виды, общие и частные методы доказательства. Детально описана пропедевтическая работа по подготовке учащихся к доказательству теорем, показана работа учителя по подготовке к уроку, на котором будет доказываться теорема, Рассмотрен вопрос об организации деятельности учащихся по «перекрестному» формулировке теоремы и поиску способов и методов ее доказательства, описаны различные приемы закрепления теоремы.

Рецензенты:

доктор педагогических наук, профессор М.П. Лапчик.

доктор физико-математических наук, профессор А.К. Гуц.

Работа опубликована при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант по результатам проведения конкурса 2000 года по фундаментальным исследованиям в области гуманитарных наук – ГОО-2.2-46).

© В.А. Далингер, 2002

© Изд-во ОмГПУ, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|------------|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 5 |
| ГЛАВА 1. ТЕОРЕМА, ЕЕ ВИДЫ И МЕТОДЫ | |
| ДОКАЗАТЕЛЬСТВА..... | 14 |
| §1. Понятие теоремы..... | 14 |
| §2. Методы доказательства теорем | 23 |
| <i>п.2.1. Частные методы доказательства.....</i> | <i>31</i> |
| <i>п.2.2. Общие методы доказательства.....</i> | <i>47</i> |
| ГЛАВА II. ПРОПЕДЕВТИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ | |
| ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ | 64 |
| §1. Формирование у учащихся умения подмечать закономерности . | 65 |
| §2. Воспитание у учащихся понимания необходимости доказательства | 97 |
| §3. Обучение учащихся умению выделять условие и заключение в математических утверждениях..... | 101 |
| §4. Ознакомление учащихся с простыми и сложными высказываниями и значениями их истинности..... | 102 |
| §5. Ознакомление школьников с понятием отрицания высказываний и с понятием противоречивых высказываний.... | 106 |
| §6. Обучение учащихся умению выделять различные конфигурации на одном и том же чертеже | 109 |
| §7. Обучение учащихся умению пользоваться контрпримерами | 112 |
| §8. Обучение учащихся умению выполнять геометрические чертежи и читать их | 116 |
| §9. Формирование у учащихся умения выводить следствия из заданных условий..... | 136 |
| §10. Формирование у учащихся умения проводить доказательные рассуждения, делать выводы | 142 |
| ГЛАВА III. ПОДГОТОВКА УЧИТЕЛЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ | |
| ТЕОРЕМ НА УРОКЕ | 163 |
| §1. Анализ формулировки теоремы и выяснение ее значения в системе других теорем..... | 168 |
| §2. Построение аналитических рассуждений, облегчающих понимание доказательства теоремы..... | 170 |
| §3. Определение ведущего метода доказательства, исследование особенностей доказательства..... | 172 |

| | |
|---|------------|
| §4. Исследование математических ситуаций, возникающих при доказательстве | 174 |
| §5. Поиск других методов и способов доказательства теоремы | 179 |
| §6. Определение рациональной записи доказательства теоремы на доске и в тетрадях учащихся..... | 196 |
| §7. Подбор задач, решение которых облегчит доказательство теоремы | 198 |
| §8. Подбор задач, закрепляющих доказываемую теорему | 200 |
| §9. Подбор материала для внеклассной работы, связанный с изученной теоремой..... | 210 |
| ГЛАВА IV. МЕТОДИКА РАБОТЫ НАД | |
| ФОРМУЛИРОВКОЙ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ | |
| И ЗАКРЕПЛЕНИЕМ ТЕОРЕМЫ..... | |
| | 238 |
| §1. Усвоение учащимися формулировки теоремы | 238 |
| §2. Методика проведения учебных исследований для самостоятельного открытия учащимися математических фактов | 272 |
| §3. Обеспечение усвоения учащимися доказательства теоремы | 310 |
| §4. Разработка методики обучения учащихся доказательству теорем, основанной на когнитивно-визуальном подходе..... | 318 |
| §5. Закрепление формулировки теоремы и ее доказательства..... | 345 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | 400 |

ВВЕДЕНИЕ

Читатель имеет обыкновение при чтении книги пропускать различного рода предисловия и введения, но вряд ли это целесообразно, ибо он упускает возможность установить с автором первоначальный контакт. Во введении актуализированы те проблемы, которые явно или косвенно связаны с методикой формирования у учащихся умения доказывать теоремы и тем самым даны общие ориентиры для учителя. Пытливый ум, воображение и педагогический опыт читателя помогут ему сделать эти ориентиры базовыми идеями в совершенствовании процесса обучения математике вообще и в обучении учащихся доказательству теорем, в частности.

Автор надеется, что предлагаемая работа в какой-то степени удовлетворит запросы учителей, даст им возможность руководствоваться в своей практике интенсивной методикой.

Почему одни ученики довольно легко справляются с решением задач, доказательством теорем, другие назубок знают теорию, но не могут ее применять на практике, третьи проявляют полную беспомощность во всем. И недоумевает учитель: "Бьюсь, бьюсь, стараюсь - и никакого результата". Знакомая ситуация, не правда ли? В чем дело? Неужели только в способностях учеников, слабой базе их знаний или плохих учебных программах и учебниках?

Думается не только в этом. В значительной степени все зависит от используемой учителем технологии обучения. До настоящего времени школьное обучение нацеливалось главным образом на усвоение знаний, умений и навыков, а не на развитие учащихся. И это явилось следствием традиционного информационно-объяснительного подхода к построению содержания образования, когда большой удельный вес знаний дается в готовом виде учителем без опоры на самостоятельную работу учащихся.

Погоня же за одними знаниями и информацией - экстенсивный путь построения содержания и способов образования; интенсивный путь может быть осуществлен лишь при использовании принципов деятельностного подхода в образовании [111].

Суть деятельностного подхода состоит в том, что он ориентирует не только на усвоение знаний, но и на способы этого усвоения, на образцы мышления и деятельности, на развитие познавательных сил и творческого потенциала ребенка. Решающим звеном деятельностного подхода является собственная активная учебно-познавательная деятельность учащихся.

Недостаток традиционной системы обучения состоит в том, что учителя реализуют в основном лишь одну функцию знаний - информативную, оставляя в стороне другую, не менее значимую, - развивающую. Эти две функции тесно взаимосвязаны, но они не тождественны. Как отмечает И.С.Якиманская, "образованность", то есть научная информированность, и "развитость мышления" далеко не одно и то же [203, с.18].

Реализация развивающей функции обучения требует от учителя не простого изложения знаний в определенной системе, а предполагает посредством знаний учить школьников мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже известные. Учащихся надо целенаправленно учить познавательной деятельности, вооружать их учебно-познавательным аппаратом.

С.Л.Рубинштейн отмечал, что процесс накопления знаний и умений следует рассматривать как учение, а процесс приобретения способностей как развитие [162, с.221]. Степень развитости ученика измеряется и оценивается его способностью самостоятельно приобретать новые знания, способностью использовать в учебной и практической деятельности уже полученные знания. Вот почему целью общего среднего образования как базового в единой системе непрерывного образования является воспитание у учащихся активности и учебной

самостоятельности. Обучение не может считаться правильно ориентированным и не может протекать успешно, если не осуществляется вооружение школьников системой умений и навыков учебного труда, помогающей в овладении знаниями, умениями и навыками, и культурой мышления. Уместно в связи с этим привести слова французского философа М.Монтеня: "Мозг хорошо устроенный стоит больше, чем мозг хорошо наполненный".

Сегодня настала потребность иметь в школе два журнала: один, который хорошо знаком учителю и ученику, - журнал учета успеваемости, и другой - журнал учета овладения учеником общеучебными умениями и навыками (умение работать с учебником, умение выделять главное, умение анализировать, синтезировать, обобщать, систематизировать, абстрагировать и т.д.).

Такое положение потребует от учителя вести работу по вооружению школьников учебно-познавательным аппаратом не попутно с формированием предметных знаний, а явно, сделав эту работу компонентом каждого урока.

Сейчас в школе обучение в значительной степени строится по формуле: "Усвоение = Понимание + Запоминание", в основу же должна быть положена следующая формула: "Овладение = Усвоение + + Применение знаний на практике", которая в полном объеме реализуется в процессе восприятия, осмысления, запоминания, применения, обобщения и систематизации.

В педагогической литературе различают меру и характер обученности. И.Я.Лернер пишет: "Мера обученности обусловлена объемом усвоенного школьником содержания образования; характер обученности определяется видом усвоенного содержания образования [118, с.38].

Как уже отмечалось, в настоящее время акцент в учебном процессе сделан на меру обученности. Об этом свидетельствуют и огромное число дисциплин в школе, и чрезмерно перегруженные программы школьных курсов, и используемые учителем технологии обучения,

в основном ориентированные на передачу учащимся готовой учебной информации. Логика научного открытия изучаемого материала, процесс получения знаний, в таком случае остаются часто скрытыми от учащихся, и они видят их как результат обработки авторами учебника или учителем.

Нельзя сказать, чтобы сформулированные в школьной программе цели обучения математике определены неправильно. Каждая из них сама по себе в отдельности вполне разумна и правомерна. Но недостаток состоит в том, что взятые вместе, они образуют только некоторый эклектический конгломерат, в котором не ясна внутренняя связь между отдельными целями и способами их достижения. Получается так, что знания накапливаются как-то сами по себе, умения и навыки формируются попутно с накапливаемыми знаниями, а параллельно этому идут процессы развития мышления и способностей учащихся.

Итак, как ни старо, но обучение школьников доказательству теорем упирается во все те же пресловутые "вооружение учащихся умениями и навыками умственного труда", "развитие самостоятельности мышления", "развивающие функции обучения" и т.п. Как же "оживить" эти термины? Ответ на этот вопрос предполагает реализацию в процессе обучения деятельностного подхода.

С позиций всего вышесказанного мы и будем трактовать вопросы, относящиеся к методике обучения учащихся умению доказывать теоремы. Заметим, что успех в обучении учащихся доказательству теорем определяется не применением одного какого-нибудь приема или метода, а системой преподавания в целом.

Структурной единицей учебно-познавательной деятельности является умение доказывать. Ведущая функция этого умения обуславливается тем, что в любом учебном предмете доказательство выступает в качестве метода исследования тех элементов знаний, которые составляют его содержание.

Основными целями обучения школьников доказательству в курсе математики являются:

- обеспечение усвоения учащимися теоретических знаний по курсу математики;
- выработка у учащихся представления о математике как о дедуктивной науке;
- обеспечение осознанности, глубины и устойчивости знаний;
- развитие мыслительной деятельности учащихся.

Ведущей функцией обучения учащихся доказательству должна быть развивающая, а не информационная. Изучение теорем в школе имеет своей целью не только сообщение школьникам некоторых геометрических результатов, но и методов, с помощью которых эти результаты получаются. Уместно в связи с этим напомнить слова А.Дистервега: "Плохой учитель преподносит истину, хороший - учит ее находить".

Школьная практика показывает, что в работе учителей преобладает тенденция учить ученика конкретному доказательству тех или иных теорем, но слабо ведется работа по вооружению школьников умениями вообще доказывать. По этому поводу А.К.Артемов пишет, что "многие школьники, вместо обобщенных умений, нередко овладевают лишь частными умениями, относящимися к доказательству отдельных теорем, наблюдается "разучивание теорем" [15, с.224].

Доказательство каждой новой теоремы обычно рассматривается как отдельно взятый факт, добавляющий к знаниям учащихся еще один элемент знаний. На усвоение школьниками этого нового факта и направлены все усилия учителя. Следует же особо обращать внимание школьников на приемы, которые используются при доказательстве теорем, на приемы поиска этого доказательства. При таком подходе доказательство каждой новой теоремы будет служить не только объектом усвоения, но и средством для формирования общих приемов доказательства теорем. Разница между способным учеником и слабоуспевающим состоит не в том, что первый больше знает, а именно в том, что он владеет более богатым арсеналом различных приемов получения знаний, знает приемы и способы их использования.

В отличие от А.А.Столяра, который под обучением доказательств понимает "обучение мыслительным процессам поиска, открытия, построения доказательства, а не обучение воспроизведению и заучиванию готовых доказательств" [172, с.145] мы будем под обучением доказательствам понимать как обучение школьников готовым доказательствам (они предложены либо учителем, либо учебником), так и обучение учащихся самостоятельному поиску доказательств.

Исследования, проведенные З.И.Слепкань [166, 167], показали, что проблему обучения доказательствам целесообразно расчленить на несколько последовательно решаемых дидактических задач:

- 1) Изучение готовых доказательств, умение воспроизводить их;
- 2) Самостоятельное построение доказательства по образцу с изученным;
- 3) Поиск и изложение доказательств указанным учителем методом или способом;
- 4) Самостоятельный поиск и изложение учащимися доказательств математических утверждений.

Анализ школьной практики показывает, что знания учащихся, связанные с изучением теорем, умения применять их к решению задач, находятся не на должном уровне.

Можно указать три основные причины низкого уровня сформированности у учащихся умения доказывать теоремы:

- связанные с психическими факторами (ослабление психических функций: внимания, памяти, мышления и т.д.);
- вытекающие из недостатков программ, учебников и учебных пособий по математике;
- обусловленные несовершенством организации процесса обучения.

Главная причина состоит в том, что при обучении доказательству теорем учебно-познавательная деятельность учащихся направляется учителем главным образом на понимание и запоминание, в ущерб ознакомлению школьников с методами и способами рассуждений, ле-

жащих в основе поиска доказательства. Учителем не стимулируется постоянный анализ обучающихся своей деятельности при доказательстве теорем, в результате чего эта деятельность ими не осознается.

При доказательстве теорем учителя организуют лишь синтетическую деятельность учащихся, в результате которой они идут по плану доказательства, предложенного учебником. Если бы учебная деятельность школьников при доказательстве теорем была бы аналитико-синтетической, то была бы обеспечена сознательность в осуществлении плана доказательства.

Учителю следует хорошо знать, что не единым доказательством ценно изучение теорем, или иначе: "значение имеет сама творческая деятельность, а не то, что она сотворила" [113, с.20].

Анализ школьной практики показывает, что учителя при обучении учащихся доказательству теорем не ставят перед ними цели осознания способа, каким было получено доказательство, а сами, в основном, показывают готовые доказательства, хотя умение доказывать, не находится в прямой зависимости от числа доказанных теорем.

Причины низкого уровня сформированности у учащихся умения доказывать состоят также в увлечении учителем на уроке процедурой оформления доказательства, а не процессом его получения; в недостаточной работе по обеспечению переноса приема доказательства с одних теорем на другие, сходные с ними по содержанию и методам доказательства; в отсутствии работы по формированию у школьников навыков контроля и самоконтроля.

При формировании у учащихся умения доказывать учителями не в достаточной мере учитываются возрастные и индивидуальные особенности, хотя в педагогической литературе отмечается, что "если подростковый возраст считают возрастом усвоения доказательств, то юношеский возраст – это возраст, когда создаются доказательства. В связи с этим у старшеклассников заметно возрастает критическое отношение к предлагаемым доказательствам и стремление к обоснованию своих собственных доказательств. С этим связано и то, что в

мышлении юноши, наряду с категорическими суждениями, большое место занимают суждения гипотетические" [33, с.55].

Основными направлениями в работе с учащимися по формированию у них умения доказывать могут быть следующие.

1. Показывать учащимся роль и значение доказательства в открытии новых знаний и в усвоении учебного материала курса математики.

2. Разъяснять школьникам, в чем состоит сущность доказательства как процесса утверждения или опровержения истинности мыслей.

3. Проводить целенаправленную работу по обучению учащихся пользоваться индуктивным и дедуктивным методами (формировать умение находить общее в отдельных частных примерах; воспитывать у учащихся критическое отношение к индуктивному заключению; формировать умение отличать индуктивные умозаключения от дедуктивных).

4. Планомерно формировать у учащихся умения выводить логические следствия из посылок, приучать школьников логически верно оформлять свои рассуждения.

5. Формировать у учащихся познавательные действия, необходимые для доказательства и учить их применять в нужных ситуациях.

6. Учить школьников обобщать познавательные действия, которые выполняются в ходе доказательства. Как показали исследования ученых (Э.И.Айвазян, М.М.Бурда, З.И.Слепкань, А.А.Столяр и др.) умения учащихся доказывать теоремы следует рассматривать как определенные умственные действия трех видов: ориентировочные, исполнительные, контрольно-корректировочные.

К *ориентировочным действиям* относятся: распознавание понятий, входящих в условие теоремы; владение алгоритмами доказательств вспомогательных утверждений; система указаний по осуществлению анализа состава доказываемого утверждения; система указаний по отысканию планов доказательств; система указаний по применению конкретных методов доказательств; обучающие алгоритмы построения планов доказательств определенных групп утверждений.

К *исполнительным действиям* относятся: действия выведения следствий и выбор следствий, достаточных для доказательства; действия подведения геометрических фигур под понятия.

Контрольно-корректировочные действия включают в себя: контроль и коррекция состава условия доказываемого утверждения; контроль и коррекция логических этапов доказательства; контроль и коррекция полученного результата.

Итак, задачи поставлены, намечены основные пути их решения, перейдем к систематичному анализу поднятой проблемы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕМА, ЕЕ ВИДЫ И МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

§1. ПОНЯТИЕ ТЕОРЕМЫ

Структуру отдельных мыслей и способы их сочетаний называют *формами мышления*. С точки зрения формальной логики мышление характеризуется тремя основными формами: *понятиями, суждениями, умозаключениями*.

Примеры *понятий*.

1. Треугольник - это фигура, состоящая из трех отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой.
2. Арифметическим квадратным корнем из числа Q называется неотрицательное число, квадрат которого равен Q .

Примеры *суждений*.

1. Каждая прямая разделяет плоскость на две полуплоскости; любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от этой прямой, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от нее.
2. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Примеры *умозаключений*.

1. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.
2. Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Следует заметить, что на вопрос "Чем являются те или иные утверждения: теоремами, аксиомами или определениями?" нельзя ответить однозначно вне контекста какого-нибудь курса математики. Так, например, утверждение "Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой" в одном курсе