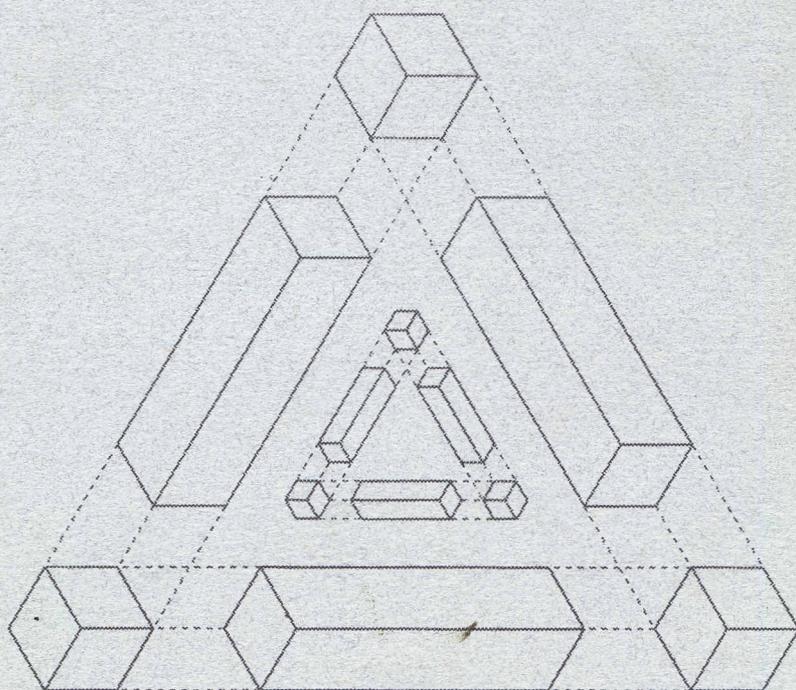


22.15  
Д 152

В.А.Далингер

*Стереометрические задачи  
на построение*



Тесса  
Санкт-Петербург – 2000 г.

Печатается по постановлению учебно-методического объединения высших учебных заведений Российской федерации по педагогическому образованию на базе МПГУ (протокол №8 от 12.10.1999 г.)

ББК 74.262

ДАЛИНГЕР В.А. Стереометрические задачи на построение: Учебное пособие. – СПб: Изд-во Тесса, 2000. – 122 с., ил. – 249, таб. – 4.

ISBN 5-8064-0264-8

Автор предлагает вниманию читателей учебное пособие, которое можно считать практико-ориентированной монографией, посвященное трудной и очень важной теме курса геометрии: “Стереометрические задачи на построение”.

В нем изложены теоретические основы решения позиционных и метрических задач на изображениях и приведены подробные решения большого числа задач.

Учебное пособие может быть использовано студентами физико-математических специальностей педуниверситетов в процессе изучения курсов геометрии, методики преподавания математики, практикума по решению математических задач. Оно будет также полезно учащимся и учителям математики общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, ПТУ, ССУЗ.

Рецензенты:

*доктор физико-математических наук, профессор А.К. Гуц,*

*доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Зубков.*

ISBN 5-8064-0264-8

© В.А. Далингер, 2000 г.

© Издательство ОмГПУ, 2000 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
§1. Задачи на построение в школьном курсе стереометрии.....	6
§2. Общие сведения об изображениях пространственных фигур и их сечений .....	15
§3. Простейшие стереометрические задачи на построение.....	65
§4. Задачи на построение, связанные со скрещивающимися прямыми .....	92
§5. Геометрические места точек, используемые для решения задач на построение в стереометрии .....	102
§6. Задачи на нахождение геометрических мест точек в пространстве ....	113
§7. Геометрические преобразования пространства и их использование для решения задач на построение .....	118
§8. Задачи на построение сечений многогранников .....	132
§9. Задачи на построение сечений тел вращения .....	161
§10. Метрическая определенность изображения и типы метрических задач на изображениях.....	171
§11. Конструктивные метрические задачи на изображениях плоских фигур.....	177
§12. Конструктивные метрические задачи на изображениях неплоских фигур.....	182
§13 Задачи для самостоятельного решения .....	207
Литература .....	244

*Моим ученикам,  
настоящим и будущим,  
творцам XXI века,  
посвящаю.*

## **ВВЕДЕНИЕ**

Одной из важнейших задач обучения учащихся геометрии в школе является формирование и развитие у них пространственных представлений, которые включают в себя создание и оперирование пространственными образами.

На первых порах обучения основным источником образования геометрических образов являются предметы окружающей действительности и модели геометрических тел.

Затем важную роль начинают играть чертежи, на которых изображаются геометрические тела. Чертеж как бы заполняет пробел между предметными моделями и абстрактными представлениями пространственных фигур.

Особо важную роль в формировании и развитии пространственных представлений играют стереометрические задачи на построение.

Задачи на построение в пространстве решаются двумя принципиально различными методами: в воображении и на проекционном чертеже.

В процессе решения задачи на построение в воображении устанавливается лишь факт существования решения, само же построение искомого элемента не выполняется. Решение задачи сводится к перечислению такой совокупности геометрических операций, фактическое выполнение которых приводит к построению искомого элемента. Рисунок, который сопровождает воображаемые (условные) построения, носит исключительно иллюстративный характер.

При решении задач на построение на проекционном чертеже с помощью определенного набора инструментов (обычно, как и в планиметрии, это циркуль и линейка) явно выполняется конечная последовательность построений, приводящая к искомому элементу.

Специфика задач на построение в пространстве состоит в том, что не существует чертежных инструментов, позволяющих чертить геометрические фигуры непосредственно в пространстве. Пространственные фигуры изображаются плоским рисунком, а значит, такой рисунок во многом является условным: линейные и угловые размеры на нем искажаются.

В школьном курсе стереометрии учащимся предлагаются задачи как на воображаемые построения, так и на построение на проекционном чертеже.

В данной книге рассматриваются два типа задач на построение на проекционных чертежах: задачи на позиционно полных изображениях и метрические задачи на проекционных изображениях.

Содержание этой книги поможет студентам физико-математических специальностей педуниверситетов в изучении соответствующих разделов таких курсов, как геометрия, практикум по решению математических задач, методика преподавания математики.

Это учебное пособие может быть использовано учителями математики и учащимися общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, ПТУ, ССУЗ для проведения соответствующих спецкурсов, факультативов и для подготовки докладов на ученические научные конференции.

В пособии найдут для себя полезный материал также студенты технических вузов и художественно-графических специальностей педуниверситетов, изучающих начертательную геометрию.

## §1. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ

Приведем в данном параграфе все задачи на построение, которые содержатся в школьном учебнике геометрии [5].

10 класс

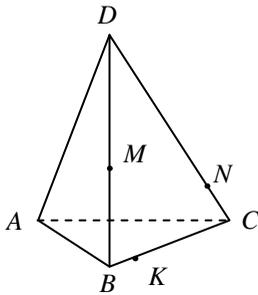


Рис. 1

1) Перечертите рисунок 1 в тетрадь и постройте точку пересечения: а) прямой  $MN$  с плоскостью  $ABC$ ; б) прямой  $KN$  с плоскостью  $DAB$ .

2) Точка  $M$  является серединой ребра  $SA$  тетраэдра  $SABC$ . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно плоскости грани  $ABC$ .

3) Решите предыдущую задачу для случая, когда точка  $M$  является внутренней точкой грани  $SAB$ .

4) Постройте медианы грани  $SAB$  данного тетраэдра  $SABC$ .

5) Боковые ребра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  данного тетраэдра  $SABC$  равны. Постройте высоты  $SH_1$ ,  $SH_2$  и  $SH_3$  соответственно граней  $SAB$ ,  $SBC$  и  $SCA$ .

6) Постройте сечение тетраэдра  $KLMN$  плоскостью, проходящей через ребро  $KL$  и середину  $A$  ребра  $MN$ . Постройте другое сечение, проходящее через середины  $E$ ,  $O$  и  $F$  отрезков  $LM$ ,  $MA$  и  $MK$ . Докажите, что плоскости  $EOF$  и  $LKA$  параллельны.

7) Постройте сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ : а) плоскостью  $ABC_1$ ; б) плоскостью  $ACC_1$ . Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

8) Постройте сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостями  $ABC_1$  и  $DCB_1$  и постройте отрезок, по которому эти сечения пересекаются.

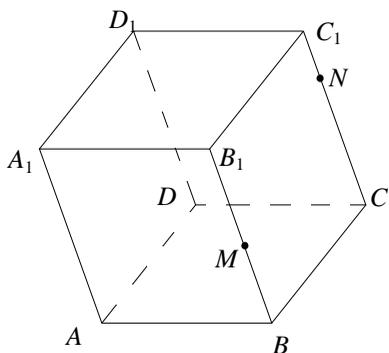


Рис. 2

9) Перечертите рисунок 2 в тетрадь и постройте точку пересечения: а) прямой  $MN$  с плоскостью  $ABC$ ; б) прямой  $AM$  с плоскостью  $A_1B_1C_1$ .

10) Через внутреннюю точку  $M$  грани  $AA_1B_1B$  параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  проведите сечение, параллельное: а) плоскости основания  $ABCD$ ; б) грани  $BB_1C_1C$ ; в) плоскости  $BDD_1$ .

11) Постройте сечение параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $BKL$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $L$  – середина ребра  $CC_1$ . Докажите, что построенное сечение – параллелограмм.

12) Постройте сечение параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью, проходящей: а) через ребро  $CC_1$  и точку пересечения диагоналей грани  $AA_1D_1D$ ; б) через точку пересечения диагоналей грани  $ABCD$  параллельно плоскости  $AB_1C_1$ .

13) Постройте сечение параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью, проходящей через диагональ  $AC$  основания параллельно диагонали  $BD_1$ . Докажите, что построенное сечение – равнобедренный треугольник, если основание параллелепипеда – ромб и углы  $ABB_1$  и  $CBB_1$  прямые.

14) Постройте сечение параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $B_1$  и  $D_1$  и середину ребра  $CD$ . Докажите, что построенное сечение – трапеция.

15) Перечертите рисунки 3, а, б в тетрадь и на каждом из них постройте сечение параллелепипеда плоскостью  $MNK$ .

16) Постройте сечение тетраэдра  $ABCD$  плоскостью, проходящей через внутреннюю точку ребра  $AB$  параллельно прямым  $AC$  и  $BD$ .

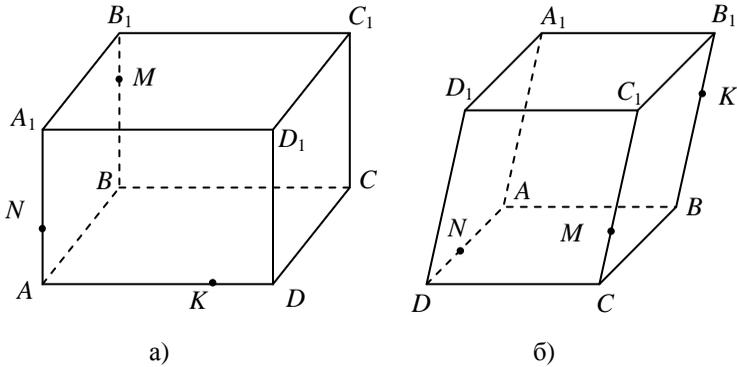


Рис. 3

17) Постройте сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью  $MNK$ , если:  
 а)  $M$  и  $N$  – внутренние точки ребер  $BD$  и  $CD$ , а  $K$  – внутренняя точка грани  $ABC$ ;

б)  $K$  – внутренняя точка ребра  $DC$ , а  $M$  и  $N$  – внутренние точки граней  $ABC$  и  $ACD$ .

18) Точка  $M$  является внутренней точкой ребра  $AB$  данного тетраэдра  $ABCD$ . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно грани  $BDC$ .

19) Укажите линию пересечения плоскостей  $A_1BCD_1$  и  $BDD_1B_1$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

20) Точка  $M$  является внутренней точкой ребра  $AB$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно диагональной плоскости  $ACC_1$ .

21) Точка  $M$  является внутренней точкой ребра  $BC$  данного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно диагональной плоскости  $BDC_1$ .

22) В правильной пирамиде  $MABCD$  точки  $K$ ,  $L$  и  $N$  лежат на ребрах  $BC$ ,  $MC$  и  $AD$ ;  $KN \parallel BA$ ,  $KL \parallel BM$ . а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $MNK$ .

костью  $KLN$  и определите вид сечения. б) Докажите, что плоскость  $KLN$  параллельна плоскости  $AMB$ .

23) В правильной пирамиде  $MABCD$   $AM=b$ ,  $AD=a$ . а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через диагональ  $BD$  основания параллельно ребру  $MA$ , и найдите площадь сечения. б) Докажите, что точки  $M$  и  $C$  равноудалены от плоскости  $\alpha$ .

24) Даны две скрещивающиеся прямые, угол между которыми равен  $90^\circ$ . Найдите множество середин всех отрезков данной длины  $d$ , концы которых лежат на этих прямых.

Приведем требования к учащимся старшей школы, которые предъявляются государственным стандартом по математическому образованию к знаниям, умениям и навыкам по теме “Задачи на построение в пространстве” [55].

### ***I. Тема: “Точка, прямая и плоскость”.***

Выпускник должен уметь:

1) Изображать на рисунке точки, прямые и плоскости в заданном взаимном расположении.

2) Задавать плоскость с помощью трех точек, точки и прямой, пересекающихся или параллельных прямых и изображать их на рисунке.

Примеры.

а) Изобразить плоскость  $\alpha$  и точку  $M$ , которая не лежит в этой плоскости. Проведите через точку  $M$  прямые  $a$ ,  $b$ , и  $c$  так, чтобы точки пересечения их с плоскостью  $\alpha$  не лежали на одной прямой. Лежат ли прямые  $a$ ,  $b$ , и  $c$  в одной плоскости? Ответ поясните.

б) Начертите две пересекающиеся прямые. Задайте двумя точками и начертите прямую, которая лежит с данными прямыми в одной плоскости; не лежит с данными прямыми в одной плоскости.

в) Прямые  $a$ ,  $b$  и точка  $M$  лежат в плоскости  $\alpha$  (рис. 4). Точка  $K$  не лежит в ней. Проведите линию пересечения: плоскостей заданных прямой  $a$  и точкой  $K$ , прямой  $b$  и точкой  $K$ ; плоскости  $\alpha$  и плоскости, заданной прямой  $OK$  и точкой  $M$ .

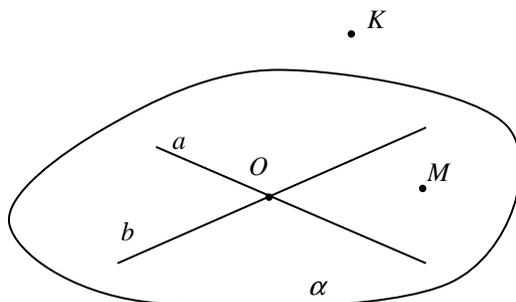


Рис. 4

## II. Тема: “Взаимное расположение прямых в пространстве”.

Выпускник должен уметь правильно изображать на рисунках пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые.

Примеры.

а) Начертите треугольную пирамиду  $MABC$ . Проведите прямую  $a$  через середины ребер  $MB$  и  $MC$ . Назовите: две пары пересекающихся прямых; две пары скрещивающихся прямых; пару параллельных прямых.

б) Начертите параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Назовите две прямые: пересекающиеся с прямой  $AC$ ; параллельные прямой  $A_1 D_1$ . Как расположены прямые  $D_1 B$  и  $AC$ ;  $A_1 C$  и  $BD$ ;  $A_1 C$  и  $D_1 B$ ?

в) Изобразите плоскость  $\alpha$ , прямую  $a$ , лежащую в ней, и точку  $M$ , которая не лежит в этой плоскости. Проведите через точку  $M$  прямую: пересекающую прямую  $a$ ; параллельную прямой  $a$ ; скрещивающуюся с прямой  $a$ .

г) Через точку  $M$  ребра  $KB$  правильной четырехугольной пирамиды  $KABCD$  проведите: прямую, параллельную прямой  $AD$ ; прямую, парал-