

В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ
ФУНКЦИЙ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО
ПЕРЕМЕННОГО**

Омск – 2010

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Омский государственный педагогический университет»

В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Омск – 2010

ББК 22.161.Ся73
Д.152

Печатается по решению редакционно-
издательского совета ГОУ ВПО «Омский
государственный педагогический
университет»

Далингер В.А., Симонженков С.Д.

Элементы теории функций действительного переменного: учебное
пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2010. – 103 с.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Зубков;
кандидат физико-математических наук доцент Д.В. Князев.

ISBN 978-5-900179-26-5

Данное учебное пособие предназначено для студентов математи-
ческих специальностей педвузов. Некоторые разделы вполне доступ-
ны для учащихся классов и школ математического профиля в качестве
элективного курса. Пособие не содержит систематического и доказа-
тельного изложения материала, зато авторы, соблюдая принцип исто-
ризма, стремились детально осветить основные понятия.

ББК 22.161.Ся73

ISBN 978-5-900179-26-5

© Далингер В.А., Симонженков С.Д., 2010;

© ГОУ ОмГПУ, 2010.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Теория множеств по кантору	7
2. Непрерывные фнкции	28
3. Монотонные функции.....	41
4. Функции ограниченной вариации	48
5. Элементы теории меры.....	57
6. Измеримые функции.....	68
7. Интеграл Лебега	75
8. Решения задач.....	86
Приложение: библиографический словарь	98
Литература	103

ВВЕДЕНИЕ

Курс теории функций действительного переменного (ТФДП) программы педвуза призван вооружить будущего учителя математики строгими обоснованиями изученного ранее курса математического анализа, сообщить ему ряд сведений, относящихся к современным представлениям о множестве, числе, функции, интеграле. На математическом факультете ОмГПУ эта дисциплина излагается на 4-ом курсе. Поэтому от читателя предполагается владение основными понятиями анализа (пределы, свойства непрерывных функций, производные, интегралы, ряды).

Основанием для построения ТФДП является теория бесконечных множеств, поэтому изложение материала начинается с их теории, развитой Г. Кантором. Затем выясняется структура открытых и замкнутых множеств на прямой. Рассматриваются некоторые классы функций действительного переменного: непрерывные, монотонные, функции ограниченной вариации. Важным добавлением к свойствам непрерывных на отрезке функций (ограниченность, теорема о нуле и т.д.) является теорема Вейерштрасса о приближении многочленами как следствие теоремы о приближении на единичном отрезке многочленами Бернштейна. Более углубленно, чем в стандартных курсах анализа, рассматривается вопрос о связи непрерывности с дифференцируемостью – разбирается пример везде непрерывной на числовой оси и нигде не дифференцируемой функции («пила» Ван-дер-Вардена). Выясняется природа точек разрыва монотонной на отрезке функции. Доказывается характеристическое свойство функции ограниченной вариации на отрезке – теорема Жордана о представимости ее в виде разности двух возрастающих функций. Обсуждается равносильность двух понятий спрямляемости дуги кривой, приводится критерий спрямляемости. Далее излагаются основы теории меры по Жор-

дану как исторически первой, хотя и недостаточной, теории меры. Затем рассматривается сжатая лебеговская теория меры множеств на прямой и свойства измеримых функций. Напоминается схема построения интеграла Римана на языке интегральных сумм Римана и Дарбу, доказывается критерий Лебега интегрируемости по Риману. В заключение рассматривается интеграл Лебега, его свойства и связь с интегралом Римана.

Таков краткий обзор данной работы. К каждому разделу прилагается небольшая подборка задач. В конце пособия приведены их краткие решения, персоналии и список литературы.

Используются следующие общепринятые обозначения: N – множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел, I – множество иррациональных чисел, R – множество всех действительных чисел. Под R понимается упорядоченное поле, к аксиомам которого добавлена аксиома непрерывности в той или иной форме. Непрерывность множества R состоит в том, что в нем нет «щелей». Вот точная формулировка.

Аксиома непрерывности. Для любых двух непустых множеств A и B в R со свойством « A левее B » (т.е. $a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$) существует хотя бы одно число $c \in R$ такое, что $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$ (так называемое разделяющее число).

В аксиоме Дедекинда (1872) при дополнительном условии $A \cup B = R$ утверждается, что существует либо самая правая точка из A , либо самая левая точка из B .

В аксиоме Вейерштрасса утверждается, что всякое непустое ограниченное сверху множество имеет конечную верхнюю грань.

Аксиома (принцип) Кантора (1872): любая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длина которых стремится к нулю, имеет одну общую точку.

Оказывается, что все указанные аксиомы эквивалентны.

Будут применяться следующие известные факты.

Пусть задано целое $p \geq 2$. Тогда любое $a \in R$ может быть представлено в виде суммы ряда

$$a = A + \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p^2} + \frac{n_3}{p^3} + \dots,$$

где $A \in Z$ – целая часть числа a (обозначается $[a]$), $n_1, n_2, \dots$ – целые числа отрезка $[0, p-1]$ (p – ичные знаки числа a).

В дальнейшем будет использовано следующее утверждение : для любого $x \in [0, 1]$ существует по крайней мере одна последовательность $\{e_n, n \in N\}$ из нулей и единиц такая, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{2^n} = 0, e_1 e_2 \dots e_n \dots$$

Некоторые числа допускают два разложения, например,

$$\frac{1}{2} = 0,1000\dots = 0,0111\dots$$

Непрерывная (цепная дробь) – это выражение вида

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

где $a_0 \in Z$; $a_1, a_2, \dots \in N$. Каждое иррациональное число есть значение некоторой единственной бесконечной непрерывной дроби.