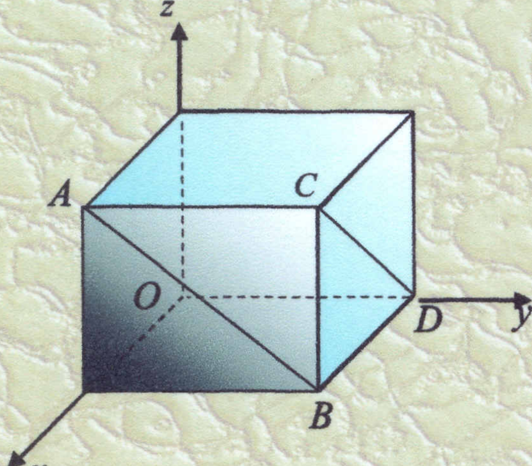
В.А. Далингер
С.Д. Симонженков

МЕТОД
МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ



В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Учебное пособие

Омск – 2012

ББК
74.226.214

Д. 152

Печатается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

Далингер В.А., Симонженков С.Д. Метод множителей Лагранжа и его применения: учеб. пособие. – Омск: – Изд-во ООО «Амфора», 2012. – 115 с., – 19 ил.

ISBN **978-5-904947-44-6**

В данном учебном пособии на многочисленных примерах из алгебры, анализа и геометрии иллюстрируются возможности применения метода множителей Лагранжа, играющего важную роль в теории оптимизации. Пособие предназначено для студентов младших курсов физико-математических факультетов педвузов, оно вполне доступно школьникам старших классов.

ISBN **978-5-904947-44-6** ББК 74.226.214

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В жизни постоянно приходится сталкиваться с необходимостью отыскивать наилучшее возможное (как говорят, оптимальное) решение среди ряда возможных. Огромное число подобных проблем возникло в самой математике, экономике, технике, … В математике исследование задач на оптимизацию началось очень давно – около 25 веков назад. Одна из самых знаменитых задач древности – это изопериметрическая задача. Около 5 веков до н.э. в Греции было открыто одно замечательное свойство окружности: среди замкнутых плоских кривых заданной длины она охватывает наибольшую площадь. В школе решаются задачи, описывающие аналогичное свойство многоугольников. Например, найти треугольник заданного периметра, имеющий наибольшую площадь. Или доказать, что квадрат имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников с заданным периметром и т.д.

Долгое время к экстремальным задачам не было сколько-нибудь единых подходов. Но примерно 300 лет назад – в эпоху формирования математического анализа – были созданы общие методы решения и исследования задач на экстремум, основанные на дифференциальном исчислении. Тогда же выяснилось, что многие задачи оптимизации играют важную роль в естествознании. В их решении принимали участие все крупные ученые: братья Бернулли, Ньютон, Эйлер, Лагранж и многие другие. Решение конкретных задач стимулировало развитие теории, и в итоге были выработаны приемы, позволяющие единым методом решать экстремальные задачи самой разнообразной природы. С историей оптимизации на популярном уровне можно познакомиться в работе [18], адресованной прежде всего школьникам. Но студенты физико-математических факультетов педвузов и учителя математики также найдут в ней для себя много полезного (например, взгляды автора на то, чему и как следует учить).

Обычно задачи оптимизации сводятся к отысканию наименьшего или наибольшего значения так называемой целевой функции (функции цели). Наиболее просты случаи, когда функция цели зависит от одной переменной, задается явной формулой и является при этом дифференцируемой то или иное число раз. Вычислив производную, мы можем использовать ее для исследования самой функции. С этой идеей учащиеся знакомы из школьного курса математики. Это – так называемая одномерная задача оптимизации. По ней имеется большая научно-популярная и учебная литература, поэтому экстремальные задачи с целевой функцией одной переменной здесь не рассматриваются. Наша цель состоит в рассмотрении одного класса задач оптимизации, когда функция цели зависит от двух и более переменных.

Предположим, что в аналитической геометрии на плоскости мы хотим вывести формулу расстояния от данной точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$. Один из способов решения состоит в минимизации функции

$$d = f(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (x; y) \in l.$$

Рассмотрим точку $M(x; y)$, которая не обязана находиться на данной прямой, а может перемещаться по всей плоскости. Как может она двигаться, чтобы величина $d = M_0M$ имела постоянное значение? Очевидно, по окружности с центром в точке M_0. Следовательно, линии уровня целевой функции – это концентрические окружности, и задача будет решена, если среди них выбрать ту, которая касается прямой l. А точку касания можно найти несколькими способами.

С этим «принципом касания» мы знакомимся обычно рано из популярной литературы. Например, в главе 7 интереснейшей книги [13] он формулируется как общий принцип, которому подчинены двумерные экстремальные задачи:

Если в точке M *на кривой* $\gamma=\{(x;y)\in R^2 : g(x,y)=0\}$ *целевая функция* $f(x;y)$ *имеет экстремальное значение* a, *то линия уровня* $f(x;y)=a$ *в точке* M *касается кривой* γ.

Таким образом, точки, «подозрительные» на экстремум функции цели при условии $g(x;y)=0$, надо искать среди точек касания линий уровня f и кривой γ. Заметим, что это правило мы, возможно, сами того не ведая, применяем при одномерной оптимизации, исследуя, скажем, на максимум функцию $y=u(x)$. Роль кривой γ играет график функции, задаваемый уравнением $g(x;y)=u(x)-y=0$. У целевой функции $f(x;y)=y$ линиями уровня являются горизонтальные прямые $y=const$, и среди них мы выбираем те, которые касаются графика. Затем среди точек касания выбираем искомые.

В этом «принципе касания», как в зародыше, кроется один общий метод, восходящий к французскому математику Ж. Лагранжу (1736 – 1813). О нем он писал (1797 г.): «Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно прибавить к функции, экстремум которой мы ищем, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимыми. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных.»

Этот метод нашел многочисленные применения в вариационном исчислении, математическом программировании, при построении некоторых вычислительных алгоритмов. Его идея состоит в сведении задачи на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум некоторой вспомогательной функции, называемой функцией Лагранжа, при этом все переменные представляются независимыми.

Цель данного пособия состоит в том, чтобы познакомить обучающихся с методом Лагранжа на ряде учебных и олимпиадных задач из дифференциального исчисления, алгебры и геометрии. Излагая метод, мы ограничиваемся только частным его случаем, когда градиенты функций, задающих уравнения связи, линейно независимы. Это условие во многих задачах обычно выполняется, оно позволяет функцию Лагранжа вводить регулярной (когда множитель при целевой функции равен единице). Обоснование метода кроется в теории неявных функций; соответствующий материал заинтересованный читатель найдет, например, в главе 15 учебника [12]. Здесь это обоснование не приводится, зато предлагается достаточно большое количество задач на усвоение метода. От читателя требуются умения бегло дифференцировать функции нескольких переменных и решать системы уравнений.

Решение обучающимися предлагаемых задач послужит средством формирования навыков самостоятельной деятельности. Пусть это – работа по образцу, но ведь и она требует переноса известного способа решения задачи в аналогичную или отдаленно аналогичную ситуацию. Заметим, что ситуация часто имеет межпредметный характер, и мы лишний раз убеждаемся в условности границ, отделяющих, например, анализ от геометрии.