

В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ



Учебное пособие

Омск - 2010

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

**ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

Омск - 2010

Печатается по решению редакционно-издательского совета ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

ББК 22.161 я7

Д. 152

Далингер В.А., Симонженков С.Д. Избранные главы математического анализа в задачах: учебное пособие. – Омск: Изд-во ООО «Амфора», 2010. – 126 с.

ISBN 978-5-904947-04-0

Данное учебное пособие предназначено для учащихся старших классов и студентов математических специальностей педвузов. Материал пособия может быть полезен при подготовке школьников и студентов к математическим олимпиадам, при создании соответствующего элективного курса или дисциплины по выбору. Учителя и вузовские преподаватели найдут здесь немало примеров, иллюстрирующих сущность понятий и методов математического анализа, а также межпредметные связи этого курса с другими.

ББК 22.161 я7

ISBN 978-5-904947-04-0

© В.А. Далингер,
С.Д. Симонженков, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ГЛАВА 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	7
1.1. Некоторые предварительные сведения	7
1.2. Теорема Штольца	11
1.3. Индукция	14
1.4. Рекуррентные последовательности	16
ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ	23
2.1. Применение непрерывности функций при вычислении пределов.....	24
2.2. Свойства непрерывных функций.....	25
2.3. Применения теоремы о нуле в алгебре и геометрии	26
ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ.....	29
3.1. Применение производной к доказательству тождеств.....	29
3.2. Применение производной к доказательству неравенств.....	30
3.3. Применение производной в алгебре и геометрии.....	32
3.4. Применение производной для решения функциональных уравнений	34
ГЛАВА 4. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ. НЕРАВЕНСТВО ИЕНСЕНА	36
ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ	41
5.1. Вывод формулы Тейлора для основных элементарных функций.....	41
5.2. Интеграл в неравенствах.....	46
5.3. Нахождение пределов сумм с помощью интегралов.....	49
5.4. Гармонические числа и интегралы	50
5.5. Функциональные и рекуррентные соотношения в интегрировании	53
ГЛАВА 6. ФОРМУЛА ВАЛЛИСА.....	58
ГЛАВА 7. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА	62
ГЛАВА 8. ЗНАМЕНИТЫЕ КОНСТАНТЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ	65
8.1. Первая константа – число π	65
8.2. Вторая константа – число e	68
8.3. Третья константа – эйлерова постоянная γ	69
ГЛАВА 9. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ	73
ГЛАВА 10. ПРИВЛЕКАЕМ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.....	77
ГЛАВА 11. АНАЛИЗ ПОМОГАЕТ ГЕОМЕТРИИ. ГЕОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АНАЛИЗУ	82
ГЛАВА 12. ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ	89
ГЛАВА 13. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	96
ЛИТЕРАТУРА	123

ВВЕДЕНИЕ

Изучение математического анализа является неотъемлемой частью образования по любой специальности, так или иначе связанной с математикой или использующей ее методы. В последние десятилетия вышло огромное число учебных пособий по анализу. В море литературы нельзя не отметить «вечно зеленые» источники – это прежде всего учебники Фихтенгольца [32, 33], любимые авторами с давних студенческих времен. Вспоминается одна байка про влюбленного студента матфака, который своей пассии вместо стихов вдохновенно читал любимые места «из Фихта» (увы, студентка – предмет его обожаний – училась на филфаке...). В Уральском государственном университете на семинаре известного математика В.К.Иванова однажды некоторая проблема долго не поддавалась решению даже «мозговым штурмом», но все-же была решена руководителем семинара, который сказал участникам после изложения решения: «Читайте Фихтенгольца!».

Другой источник из числа «вечно зеленых» – это переводной двухтомник анализа Р.Куранта. На авторов в свое время большое впечатление произвел особенно первый том [17]. Книга представляет собой мастерски написанный крупным математиком курс анализа, адресуемый будущим учителям и научным работникам. Как и у Фихтенгольца, материал сопровождается тщательно подобранными и систематизированными задачами и упражнениями, причем с решениями. Автор в одном из предисловий писал: «Больше всего обратит на себя внимание то, что я порываю с отжившей традицией разделять дифференциальное и интегральное исчисления. Это разделение, не обоснованное ни дидактически, ни по существу, ни исторически, мешает выяснению основного пункта – связи между интегралом и производной». Такое совместное изложение (говоря физическим языком, параллельное, а не последовательное) двух разделов анализа весьма импонирует авторам, оно сейчас актуально в связи тенденциями синтеза наук.

Под влиянием книг Фихтенгольца, Куранта, некоторых других источников и написано предлагаемое учебное пособие. В первом приближении оно может рассматриваться как книжка для внеклассного чтения, когда нет заумных теорий, а есть живая задача. Для кого оно предназначено? Конечно, для начинающих, но подготовленных хотя бы в рамках школьного курса анализа. Размышления авторов привели к тому, что 1). Не надо писать пособие, выдерживая систематичность и общепринятую строгую доказательность материала. Ведь таких пособий «не счесть числа»! Но начинающий не выносит педантичности, не делающей различия между существенным и несущественным. 2). Пособие должно быть практически полезным. Поэтому оно написано для школьников старших классов, студентов младших курсов педвузов, учителей и преподавателей, имеющих первоначальную подготовку в области математического анализа и желающих расширить и углубить сведения по этой дисциплине. Ведь многие важные для теории и практики факты остаются за рамками установившихся, традиционных современных разделов анализа для школ и педвузов. Например, «не проходит» формула Стирлинга, играющая важную роль во многих разделах теории вероятностей, математической статистики, теории специальных функций и т.д.

По сравнению со многими зарубежными странами, у нас внедрение элементов анализа в школьную математику началось сравнительно недавно. Тем не менее в издательствах «Наука», «Просвещение» была издана масса интересных учебных пособий, например, источники [2, 14, 16, 30]. Помимо чисто рутинных задач «на закрепление темы» там можно найти и много задач типа олимпиадных. Вообще в последние годы в математических олимпиадах для школьников самого различного ранга возросла по сравнению с предыдущими временами доля задач с элементами математического анализа. Например, доля задач на неравенства, последовательности, непрерывность функции, применение производной. Эта тематика отражена в данном пособии, поэтому оно может быть полезным для «продвинутых» учащихся, желающих попробовать свои силы в олимпиадах.

Если школьные математические олимпиады проводятся давно (в нашей стране с 1930-х г.г.), то аналогичные вузовские олимпиады начались в 1970-х г.г. Для студентов – олимпийцев, будущих педагогов – математиков, в данном пособии тоже найдется кое-что интересное, что можно взять на вооружение. Например, теорему Штольца (дискретный аналог правила Лопиталья) или определенное интегрирование, когда подынтегральная функция удовлетворяет некоторому функциональному уравнению.

Рассматриваемые в каждом разделе иллюстрационные примеры и задачи для самостоятельного решения заимствованы из самых различных источников. Помимо упомянутых выше учебников Фихтенгольца и Куранта – это практикумы по решению задач школьной математики [18, 27, 28, 35], сборники олимпиадных задач для школьников [3, 4, 15] и студентов [25, 26], неувядающий сборник задач Демидовича [13] и его расширенные и углубленные аналоги [5, 20, 29]. Есть и задачи, придуманные авторами.

Идеи историзма, синтеза наук, межпредметных связей также прослеживаются в данном учебном пособии. Особенно это касается связи анализа с геометрией (или геометрии с анализом?). Тот или иной факт из области анализа без утомительных и скучных формальных выкладок становится очевидным, если стать на геометрическую точку зрения. Примером могут быть оценки интеграла от выпуклой функции из раздела 5.2, существенно используемые далее в главе 7 для логарифмической функции при выводе формулы Стирлинга.

Некоторые разделы данного пособия (например, последние) могут быть использованы школьниками и студентами как основа для написания докладов, рефератов, курсовых работ; учителя и преподаватели найдут материал для кружковой работы и элективного курса.