МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Далингер, Е.Н. Грибова

Фейерверк замечательных кривых

Омск - 1998 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Далингер, Е.Н. Грибова

Фейерверк замечательных кривых

Учебное пособие

Омск - 1998 г.

Печатается по решению научно-методического совета Омского государственного педагогического университета

ББК 74.262

ДАЛИНГЕР В.А., ГРИБОВА Е.Н. Фейерверк замечательны кривых: Учебное пособие. - Омск: Изд-во ОмГПУ, 1998. - 87 с., ил. - 75, таб - 1.

ISBN

Данное учебное пособие содержит материал, относящийся к одному из самых красивых разделов геометрии "Кривые". В нем раскрыто основное содержание каждой из замечательных кривых, приведены их практические приложения, а также даны биографические данные тех ученых, чьими именами названы те или иные кривые.

Учебное пособие может быть использовано для проведения спецкурса, факультативных и кружковых занятий по математике, а также для подготовки докладов на научные конференции учащихся. Оно будет полезно студентам физико-математических специальностей педуниверситетов, учителям математики, учащимся общеобразовательных школ, лицеев, гимназий.

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Древнегреческие ученые знали лишь несколько линий, отличных от прямых и окружностей, которые они изучали в связи с тремя знаменитыми задачами древности: об удвоении куба, о трисекции угла, о квадратуре круга.

Менехм (IV в. до н.э.) предложил для решения этих задач конические сечения, то есть кривые, образованные при пересечении конуса плоскостью, перпендикулярной одной из образующих. Он получил три различные кривые в зависимости от того, какой конус рассекал – остроугольный, прямоугольный или тупоугольный.

Позднее Аполлоний (III в . до н.э.) назвал их эллипсом, параболой, гиперболой. Он проводил сечения в произвольном конусе плоскостью под любым углом к оси конуса.

Основателем современного учения о кривых по праву считают великого немецкого художника и ученого А. Дюрера (1471-1528 гг.). В его сочинениях изложены основания геометрии и теории перспективы; подробно рассмотрено учение о правильных многогранниках; предложены решения знаменитых задач древности; дана теория кривых линий.

Для того, чтобы читатель мог легко разбираться в содержании материала, мы раскроем суть тех понятий, которые использованы для описания свойств замечательных кривых.

1) Кривая, задаваемая уравнением $P(x;y) = 0$, где $P(x;y)$ – многочлен от x и y, называется **алгебраической кривой**.

Степень многочлена $P(x;y)$ называется порядком кривой. Замечательные кривые – гипербола, эллипс, парабола есть алгебраические кривые второго порядка. Можно доказать, что в любой системе координат уравнения этих кривых имеют вид:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + t = 0,$$

где a, b, c, d, e, t - числа, причем $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Первым, кто выделил действительные алгебраические кривые, был Р. Декарт.

Первая классификация алгебраических кривых 3-го порядка была предложена И. Ньютоном (1704 г.).

Классификация алгебраических кривых 4-го порядка впервые была проведена Э. Варингом (1792 г.).

Классификация алгебраических кривых 5-го порядка впервые была проведена Г. Крамером (1750 г.).

Классификация алгебраических кривых 6-го порядка найдена во второй половине XX в. Полной классификации кривых порядка больше 6 пока нет (Дерзайте!!!).

2) **Трансцендентная кривая** – плоская кривая, уравнение которой в прямоугольных координатах не является алгебраическим.

Название происходит от латинского слова transcendens – выходящий за пределы, переходящий.

Трансцендентные кривые в отличие от алгебраических кривых могут иметь бесконечное число точек пересечения с прямой, точек перегиба (точки, в которых вогнутость кривой меняется на выпуклость и наоборот), особых точек, вершин, асимптот и т.п.

К трансцендентным кривым относятся все спирали, квадратриса, трактриса, цепная линия, трохоида, циклоида и т.д.

3) **Декартова система координат** – прямолинейная система координат в евклидовом пространстве.

На плоскости общая декартова система координат (афинная система координат) задается точкой O (начало координат) и упорядоченной парой приложенных к ней неколлинеарных векторов (не лежащих на одной или на параллельных прямых) векторов e_1 и e_2 (базисных векторов). Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат данной декартовой системы координат. Первая, определяемая вектором e_1, называется осью абсцисс (или осью Ox), вторая – осью ординат (или осью Oy).

Декартовыми координатами точки M (рис. 1) в декартовой системе координат называется упорядоченная пара чисел $(x;\ y)$, которые являются коэффициентами разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису e_1, e_2:

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 .$$

Число x – абсцисса точки M, число y – ордината точки M.

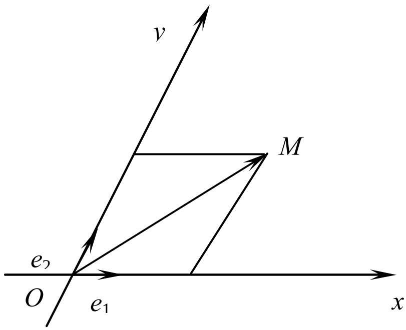

Рис. 1

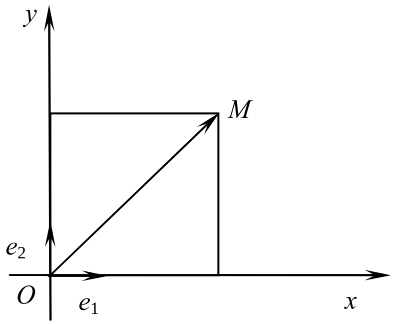

Рис. 2

Декартова система координат называется прямоугольной (прямоугольная система координат), если векторы e_1 и e_2 взаимно перпендикулярны и по длине равны единицы (рис. 2).

4) **<u>Полярная система координат</u>**. Пусть на плоскости выбрана некоторая точка O, называемая полюсом, и луч с началом в точке O, называемый полярной осью. Тогда, каждой точке M можно поставить в соответствие два числа: ρ - полярный радиус, равный длине отрезок M (рис. 3) и φ - полярный угол, равный углу между полярной осью и лучом OM. При этом $0 \le \rho < +\infty$; $\rho = 0$, если $M = 0$; $0 \le \varphi < 2\pi$.

Если на плоскости выбрать декартову систему координат так, чтобы начало этой системы совпало с точкой O, положительное направление оси Ox совпало с полярной осью, а положительное направление оси Oy состояло из точек, полярный угол которых равен $\frac{\pi}{2}$, то между декартовыми координатами x, y и полярными координатами ρ, φ произвольной точки имеет место связь, выражаемая формулами

$$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi,\ \left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

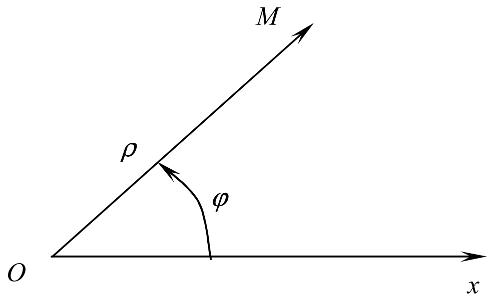

Рис. 3

5) **Огибающая семейства линий** на плоскости – линия, которая в каждой своей точке касается одной линии семейства.

6) **Асимптота** (греч. – несовпадающий, не касающийся) кривой с бесконечной ветвью – прямая, к которой эта ветвь неограниченно приближается.