

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А.Далингер

Все для обеспечения успеха на выпускных и
вступительных экзаменах
по математике

Выпуск 1

Тождественные преобразования выражений

Омск - 1995

**Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный педагогический университет**

В.А.Далингер

**Все для обеспечения успеха на выпускных и
вступительных экзаменах
по математике**

**Выпуск 1
Тожественные преобразования выражений
Учебное пособие**

Омск - 1995

Печатается по решению
редакционно-издательского
совета Омского государ-
ственного педагогического
университета

ББК 74.262

ДАЛИНГЕР В.А. Все для обеспечения успеха на выпускных
и вступительных экзаменах по математике: Выпуск 1:
Тождественные преобразования выражений: Учебное
пособие. - Омск: Изд-во ОмГПУ, 1995. 131 с. - 2 таб. - 4 ил.
- ISBN 5-8268-0068-2

Данное учебное пособие представляет собой первый выпуск
серийного издания под общим названием "Все для обеспечения
успеха на выпускных и вступительных экзаменах по математике". В
данном выпуске рассмотрены типичные ошибки учащихся и
абитуриентов, допускаемые ими на экзаменах по математике по
теме "Тождественные преобразования алгебраических и
неалгебраических выражений", показаны пути предупреждения
таких ошибок. В пособии разобраны решения типовых задач по
названной теме и даются аналогичные задачи для самостоятельной
работы.

Учебное пособие рассчитано на учащихся средних школ,
лицеев, гимназий, ПТУ, абитуриентов, поступающих в техникумы и
в ВУЗы, учителей математики, преподавателей и студентов физико-
математических специальностей педагогических институтов и
университетов. Книга будет полезна всем, кто интересуется
математикой.

ISBN 5-8268-0068-2

© В.А. Далингер, 1995 г.

© Омский педуниверситет, 1995

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр

От автора.....	6
§1. ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ.....	8
§2. ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В РАЗЛИЧНЫЕ ВУЗЫ ГОРОДА ОМСКА.....	15
2.1. Омский государственный университет.....	15
2.2. Омский государственный педагогический университет.....	22
2.3. Омский государственный технологический институт.....	27
2.4. Омский государственный технический университет.....	32
2.5. Омская государственная сельскохозяйственная академия.....	38
2.6. Омский государственный автомобильно-дорожный институт.....	40
2.7. Омская государственная академия инженеров железнодорожного транспорта.....	44
2.8. Омский филиал Российского заочного финансово-экономического института.....	46
§3. ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВЕДУЩИЕ ВУЗЫ РОССИИ.....	50

3.1. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (механико-математи- ческий факультет).....	50
3.2. Московский государственный физико-техниче- ский университет.....	55
3.3. Санкт-Петербургский государственный уни- верситет (математико-механический факуль- тет).....	59
3.4. Московский государственный авиационный технологический университет им. К.Э. Циол- ковского.....	62
§4. Типичные ошибки, допускаемые при выпол- нении тождественных преобразований выра- жений.....	65
§5. Некоторые рекомендации по выполнению тождественных преобразований.....	75
§6. Решение типовых задач на упрощение выра- жений и на доказательство тождеств.....	87
§7. Задачи для самостоятельной работы.....	109
ЛИТЕРАТУРА.....	112

ОТ АВТОРА

Читатель держит в руках первый выпуск серийного издания одного и того же автора, которое носит название "Все для обеспечения успеха на выпускных и вступительных экзаменах по математике". В данную серию войдут девять выпусков: "Тождественные преобразования выражений"; "Текстовые задачи, решаемые методом составления уравнений"; "Рациональные и иррациональные уравнения, неравенства и их системы"; "Нестандартные уравнения и неравенства и методы их решения"; "Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства и их системы"; "Функция и ее график"; "Дифференциальное и интегральное исчисление"; "Арифметические и геометрические прогрессии"; "Планиметрические и стереометрические задачи".

Целью этих девяти выпусков является оказание помощи учащимся и абитуриентам в подготовке к выпускным и вступительным экзаменам по математике. В каждом выпуске рассматриваются типичные ошибки учащихся по соответствующей теме и даются рекомендации по предупреждению этих ошибок. Составной частью всех выпусков является изложение методов решения типовых задач с приведением большого числа решений таких задач и задач для самостоятельного решения. Среди задач есть как хорошо известные, "характерные" задачи, так и задачи, различной степени трудности, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в ВУЗы.

Материал, содержащийся в семи выпусках, поможет учащимся самостоятельно (без

репетиторов) подготовиться к выпускным школьным экзаменам и к поступлению в специальные и высшие учебные заведения, он также окажет помощь учителям математики в организации работы по предупреждению и ликвидации типичных ошибок школьников, в составлении дидактических материалов, проведении обобщающих уроков в течение и в конце учебного года, в проведении кружковых и факультативных занятий, в индивидуальной работе с учащимися.

Заметим, что на выпускных и вступительных экзаменах по математике речь идет не о каких-то сверхсложных задачах, а о задачах в пределах обычного школьного курса в полном соответствии с программой, но для их решения учащийся и абитуриент должны глубоко владеть материалом программы и иметь достаточную практику в решении задач. На вступительных экзаменах абитуриент должен показать исчерпывающее, логически верное и грамотное изложение решения поставленных перед ним задач.

В данном выпуске приведена программа вступительных экзаменов по математике, а также даны образцы экзаменационных билетов по математике в различные высшие учебные заведения города Омска и в ведущие ВУЗы России.

Автор надеется, что настоящее учебное пособие поможет заинтересованному читателю в изучении математики, закрепит знания, даст ему уверенность в своих силах.

Искренне желаем Вам успехов!

§1. ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ

Последние два года высшие учебные заведения имеют право принимать вступительные экзамены по программам, разработанными самими институтами. Анализ показывает, что в различных вузах программы по математике в значительной степени имеют много общего. Приведем программу вступительных экзаменов по математике, принятую в Омском педагогическом университете.

Заметим, что программа состоит из трех разделов. Первый раздел программы представляет собой перечень основных математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий (уметь правильно их использовать при решении задач, ссылаться при доказательстве теорем). Во втором разделе указаны теоремы, которые надо уметь доказывать. Содержание теоретической части экзаменов черпается из этого раздела. В третьем разделе перечислены основные математические умения и навыки, которыми должен владеть экзаменуемый.

I Основные математические понятия и факты.

Арифметика, алгебра и начала анализа.

- 1) Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общее наименьшее кратное.
- 2) Признаки делимости на 2,3,5,9,10.
- 3) Целые числа (Z). Рациональные числа (Q), и их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.
- 4) Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей.
- 5) Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

6) Числовые выражения. Выражения с переменной. Формулы сокращенного умножения.

7) Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.

8) Логарифмы, их свойства.

9) Одночлен и многочлен.

10) Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.

11) Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции. Функция, обратная данной.

12) График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность.

13) Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

14) Определение и основные свойства функций: линейной, квадратичной $y=ax^2+bx+c$, степенной $y=ax^\alpha$ ($\alpha \in R$), показательной $y=a^x$, $a>0$, $a \neq 1$, логарифмической $y=\log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$, тригонометрических функций ($y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$), арифметического корня $y=\sqrt{x}$.

15) Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.

16) Неравенства. Решения неравенств. Понятие о равносильных неравенствах.

17) Система уравнений и неравенств. Решение системы.

18) Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n -го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n -го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

19) Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).

20) Преобразование в произведение сумм $\sin \alpha \pm \sin \beta$; $\cos \alpha \pm \cos \beta$.

21) Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.

22) Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^n$, $y = a^x$.

Геометрия

1) Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, вершина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

2) Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.

3) Векторы. Операции над векторами.

4) Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

5) Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

6) Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

7) Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.

8) Центральные и вписанные углы.

9) Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

10) Длина окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

11) Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

12) Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

13) Параллельность прямой и плоскости.

19) Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).

20) Преобразование в произведение сумм $\sin \alpha \pm \sin \beta$; $\cos \alpha \pm \cos \beta$.

21) Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.

22) Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^n$, $y = a^x$.

Геометрия

1) Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, вершина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

2) Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.

3) Векторы. Операции над векторами.

4) Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

5) Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

6) Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

7) Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.

8) Центральные и вписанные углы.

9) Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

10) Длина окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

11) Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

12) Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

13) Параллельность прямой и плоскости.

14) Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

15) Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

16) Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамида. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.

17) Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

18) Формула объема параллелепипеда.

19) Формулы площади поверхности и объема призмы.

20) Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

21) Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

22) Формулы площади поверхности и объема конуса.

23) Формулы объема шара и его частей.

24) Формула площади сферы.

II Основные формулы и теоремы.

Алгебра и начала анализа.

- 1) Свойства функции $y=ax+b$ и ее график.
- 2) Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ и ее график.
- 3) Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.
- 4) Формула корней квадратного уравнения.
- 5) Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
- 6) Свойства числовых неравенств.
- 7) Логарифм произведения, степени, частного.
- 8) Свойства функции $y=x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$) и ее график.
- 9) Свойства функции $y=a^x$ и ее график.
- 10) Определение и свойства функций $y=\sin x$, $y=\cos x$ и их графики.
- 11) Определение и свойства функций $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.
- 12) Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$.
- 13) Формулы приведения.
- 14) Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
- 15) Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов.
- 16) Формулы синуса и косинуса суммы и разности двух аргументов.
- 17) Формулы тангенса суммы и разности двух аргументов.
- 18) Производная суммы двух функций.
- 19) Уравнение касательной к графику функции.

Геометрия

- 1) Свойства равнобедренного треугольника.
- 2) Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
- 3) Признаки параллельности прямых.

4) Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

5) Признаки параллелограмма.

6) Существование окружности, описанной около треугольника.

7) Существование окружности, вписанной в треугольник.

8) Касательная к окружности и ее свойства.

9) Измерение угла, вписанного в окружность.

10) Признаки подобия треугольников.

11) Теорема Пифагора.

12) Теорема синусов.

13) Теорема косинусов.

14) Формулы площадей параллелограмма, треугольника и трапеции.

15) Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.

16) Признак параллельности прямой и плоскости.

17) Признак параллельности плоскостей.

18) Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

19) Признак перпендикулярности двух плоскостей.

III Основные умения и навыки.

Экзаменуемый должен уметь:

1) Производить арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений; пользоваться калькуляторами и таблицами для производства вычислений.

2) Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

3) Строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрической функций.

4) Решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические функции.

5) Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.

6) Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.

7) Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии — при решении геометрических задач.

8) Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.

9) Пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы и при построении графиков функций.

Заметим, что письменный и устный вступительные экзамены по математике в вузы и техникумы проверяют четкое знание абитуриентом определений математических понятий и формулировок теорем, предусмотренных программой; умение доказывать эти теоремы; умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении, использовать соответствующую символику, уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренные программой, умение применять их при решении задач. Чаще всего в билет письменного экзамена по математике включаются

задачи на исследование и построение графиков функций; на тождественные преобразования различных выражений; решение различного рода уравнений, неравенств и их систем; решение текстовых задач методом составления уравнений и систем уравнений; решение стереометрических задач; задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию.

§2. ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В РАЗЛИЧНЫЕ ВУЗЫ Г.ОМСКА

1. Омский государственный университет.

Вариант 1

1) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Их среднее арифметическое на 84 больше второго числа и на 210 меньше третьего. Найти эти числа.

2) Найти $\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

3) Боковая поверхность конуса с образующей l развернута в сектор, центральный угол которого равен $\frac{6\pi}{3}$. Найти объем конуса.

4) Решите неравенство

$$4 \log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_3 3x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x^2 + 10}.$$

Вариант 2

1) В полушаре радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, основание которого является квадратом и лежит на основании полушара. Найти