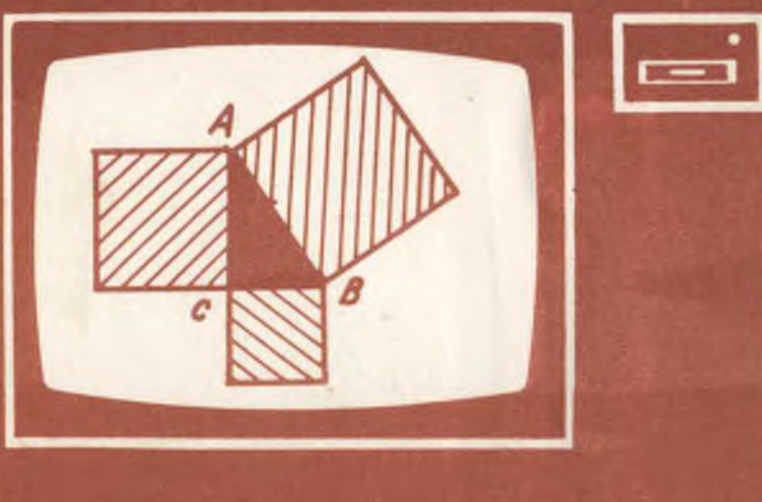
МЕТОДИКА РЕАЛИЗАЦИИ ВНУТРИПОНЯТИЙНЫХ СВЯЗЕЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Рекомендации для студентов
физико-математических факультетов



Омск — 1988

Министерство просвещения РСФСР

Омский ордена "Знак Почета" государственный
педагогический институт им. А.М.Горького

МЕТОДИКА РЕАЛИЗАЦИИ ВНУТРИПОНЯТИЙНЫХ СВЯЗЕЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Рекомендации для студентов физико-
математических факультетов

Омск - 1988

Печатается по решению научно-методического совета Омского ордена "Знак Почёта" государственного педагогического института им. А.М.Горького

УДК 371.3:51

Методика реализации внутрипонятийных связей в процессе обучения математике в средней школе: Рекомендации для студентов физико-математических факультетов.

ОГПИ им. А.М.Горького, 1988г., стр. - 39, ил. - 21, табл. - 1.

Рекомендации предназначены для студентов Ш-У курсов физико-математических факультетов с целью оказания помощи в изучении вопросов методики преподавания математики. В работе рассматривается одно из важнейших направлений дидактического совершенствования школьного курса математики - последовательная и целенаправленная реализация внутрипредметных связей в процессе обучения. Проведён логико-дидактический анализ понятийного аппарата школьного курса математики и исследованы психолого-педагогические основы формирования научных понятий у учащихся. Разработана методика реализации в процессе обучения математике внутрипонятийных связей.

Составитель: канд. пед.наук, доцент ДАЛИНГЕР В.А.

Научный редактор: доцент Сырецкий М.И.

Рецензенты: Харитон А.З., канд.пед.наук,
профессор (Тираспольский пединститут),
Кабирова А.И., канд.пед.наук,
доцент (Омский пединститут).

I. Некоторые аспекты логико-дидактического анализа понятийного аппарата школьного курса математики

Одной из основных задач современного школьного обучения является развитие целенаправленного мышления, где под мышлением понимается активный процесс отражения объективного мира в сознании учащихся. Развитие же мышления школьников предполагает формирование различных понятий, в том числе и математических, ибо они выступают в качестве основной формы мышления.

Роль понятий при изучении математики сложна и многообразна. Так, всякий раз, доказывая ту или иную теорему, в процессе доказательства мы опираемся на понятия; с другой стороны, при доказательстве теорем происходит уточнение, обогащение уже известных понятий новым содержанием.

Заметим, что список понятий, принятых в том или ином учебном предмете, выполняет лишь функцию номенклатуры, структурирующую же роль играют те связи и отношения, которые устанавливаются между понятиями.

В структуре учебного курса понятия могут играть разную роль: одни из них являются общими, с широким спектром приложений, другие же играют функцию подчиненную.

Учитель должен уметь выделять общие, ведущие понятия курса. Ведущими понятиями будем считать те, которые удовлетворяют следующим критериям: формируют у учащихся диалектико-материалистическое мировоззрение; значительно чаще других понятий служат средством изучения различных вопросов математики; активно работают на протяжении большого промежутка времени; способствуют наиболее полной реализации внутрипредметных связей, а в конечном счете и межпредметных; имеют прикладную и практическую направленность.

Примерами таких ведущих понятий могут служить число, величина, фигура, функция, график, уравнение, неравенство, равносильность, алгоритм и т.д.

Выделение ведущих понятий способствует не только теоретическому обогащению, но и, что не менее важно, упорядочение всей понятийной структуры курса. Ценность этих понятий заключается в том, что они позволяют расширить приложения школьного курса математики, а это в значительной мере решает проблему прикладной и практической ориентации математики.

Выделив ведущие понятия, учитель должен затем проследить их развитие в курсе в целом, тем самым определить в нем содержательно-методические линии. Эти линии обеспечивают курсу необходимую систематичность и последовательность. Содержательно-методические линии, развиваясь в школьных курсах математики, отражают идейную сторону математики и являются важнейшим средством обеспечения преемственности всего материала курса. Перечислим основные содержательно-методические линии школьного курса алгебры: числовая, формально-операционная, алгоритмическая, функциональная, уравнений и неравенств.

Наблюдаемое отсутствие связей между материалами отдельных тем школьного курса математики учитель может устранить с помощью планомерного и целенаправленного развития содержательно-методических линий. Обогащение содержания курса, усиление в нем внутрипредметных связей достигается не за счет увеличения объема учебного материала, а за счет его внутренних резервов.

Но при этом должно строго соблюдаться требование естественной необходимости реализации внутрипредметных связей, то есть установление связей между понятиями не должно быть надуманным, не должно идти в ущерб общей структуре курса. Наряду со связями, играющими положительную роль в процессе обучения, имеют место и связи отрицательного действия. Задача учителя - уметь в каждом конкретном случае отчленять одни связи от других и исключать связи отрицательного действия.

Приведем примеры связей отрицательного действия:

а) учащиеся, используя основное свойство дроби к дробям вида $\frac{a}{a+в}$, записывают ошибочные ответы $\frac{1}{1+в}$; $\frac{1}{в}$. Ошибки получены в результате сокращения дроби не на сомножитель (как того требует основное свойство дроби), а на слагаемое;

б) в школьном курсе математики ряд понятий вводится через определения условного соглашения: если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$; если $a \neq 0$ и n - натуральное число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; если $a > 0$, $a \neq 1$, то $a^{\log_a x} = x$; $(-a)\cdot(-в) = aв$ и т.д. С целью мотивировки выбранных определений в учебниках приводятся соответствующие пояснения.

Так, например, для мотивировки целесообразности определения $a^0 = 1$ приводится следующее пояснение:

$$1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 = 1.$$

Анализ практики преподавания математики в школе показывает, что учащиеся воспринимают это пояснение как доказательство того, что $a^0 = 1$.

Учителю следует учащимся в обязательном порядке еще раз напомнить, что в математике доказываются лишь теоремы, а равенство $a^0 = 1$ есть определение и, следовательно, доказательству не подлежит. Данные рассуждения приведены лишь с целью проиллюстрировать, что выбранное определение не противоречит нашим первоначальным знаниям о действиях над числами: деление какого-либо числа, отличного от нуля, на самое себя дает в результате единицу.

Подобного рода связи, допускаемые учениками, учитель должен своевременно предвидеть и вести работу, которая могла бы эти связи предотвратить.

Так, например, школьная практика показывает, что большое число задач по разложению на множители трехчленов вида $x^2 + px + q$ не облегчает, а скорее затрудняет формирование навыка по разложению на множители трехчленов вида $ax^2 + bx + c$ (учащиеся записывают ошибочный ответ в виде $(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, опуская множитель a). Этот факт требует от учителя использовать разумную меру упражнений первого типа; преподавание должно вестись по способу чередования разнотипных задач.

Следует помнить, что одни и те же понятия могут быть определены на основе различных исходных посылок, различными способами, причем все эти определения с точки зрения обоснованности могут оказаться равноценными, но они будут иметь существенную разницу в дидактических результатах обучения. Задача, следовательно, будет состоять в том, чтобы отыскать такой вариант, при котором эти дидактические результаты обучения будут наилучшими. Важно при этом разъяснять реальный смысл понятий, показывать, отражением каких сторон действительности они являются.

Остановимся в связи с этим на теме "Действительные числа", которая пока по многим причинам не нашла в школьных курсах математики должного места. Хотя данная тема служит основой изучения вопросов математического анализа, она, как показали результаты выпускных и вступительных экзаменов, слабо усваивается учащимися. В первую очередь отметим, что школьники не видят связей между понятием действительного числа и понятиями математического анализа, изучаемыми в школьном курсе.

Одна из причин тому - введение понятия действительного числа из задачи об извлечении корня. Это задача курса алгебры, а не математического анализа. Вопрос об извлечении корня не является главным в данном случае. Его целесообразно использовать лишь для мотивировки введения новых чисел - иррациональных.

Действительно, после того, как будет доказано, что нет рационального числа, квадрат которого будет равен 2, учащимся следует предложить задание: Постройте квадрат со стороной I и на диагонали этого квадрата, как на стороне, постройте другой квадрат (см рис. I). Чему равна площадь, получившегося квадрата АСКМ?

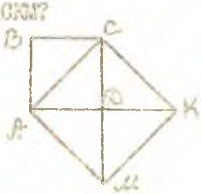


Рис. I

Решение

Так как $S_{ABCD} = I$ кв. ед,

то $S_{ACD} = \frac{I}{2}$ кв. ед. Тогда

$$S_{ACKM} = S_{ACD} + S_{CDK} + S_{DKM} + S_{ADM} =$$

$$= \frac{I}{2} + \frac{I}{2} + \frac{I}{2} + \frac{I}{2} = 2 \text{ (кв.ед)}$$

Если сторону квадрата АСКМ (диагональ АС) обозначим через x, то получим $x^2 = 2$. Но раз мы реально имеем квадрат с площадью 2 кв. ед, то "реально" существует и число, квадрат которого равен 2.

Для математического анализа ведущим является расширение множества рациональных чисел до нового множества, которое бы было непрерывным (попутно с этим будет решен вопрос и об извлечении корня из положительного числа). Главенствующее значение действительных чисел в курсе математического анализа состоит в том, что они способны выразить непрерывное изменение величины (в случае доминанты задачи об извлечении корня этот вопрос остается скрытым).

Таким образом, отработка понятия действительного числа и понятия непрерывной величины - это две стороны одного и того же процесса. Так как самой наглядной иллюстрацией непрерывного процесса служит движение точки по прямой, то в основе формирования действительного числа должно лежать, в первую очередь, понятие прямой, совокупность точек которой такова же по своей структуре, как и система действительных чисел. При таком подходе к вопросу о действительных числах закладывается фундамент преемственности данной темы с такими вопросами анализа, как предел, непрерывность, производная, интеграл и т.д.

Заметим, что семантика понятия числа имеет несколько аспектов: порядковый, количественный, измерительный, алгоритмический.

Насколько важна роль понятий, настолько же важно и то, как они, эти понятия, вводятся в школьный курс, в какую систему они организованы. Существенным является определение в структуре курса места ведущим понятиям, так как их основное назначение не информационное, а они служат целям более глубокого осмысления изучаемого материала.

Порой в методической литературе высказывается точка зрения, согласно которой введение ведущих понятий предлагается максимально приблизить к началу курса. Такая точка зрения ошибочна. При слишком раннем введении ведущих понятий, а они, как правило, имеют высокую степень абстрактности, будет утрачен их вывод из объективных оснований, знания же станут бездейственными, формальными. Должна сохраниться пропедевтика введения этих понятий, с учетом возрастных особенностей учащихся, это позволит ведущим понятиям в дальнейшем проявиться наиболее успешно.

Г.В.Дорофеев, рассматривая вопрос о соотношении содержательного и формального в школьной математике, отмечает, что методический аспект формирования строгих определений фундаментальных понятий школьного курса состоит в изменении стандарта строгости теории и ее практических применений. "Уровень строгости начал теории, - пишет Г.В.Дорофеев, - необходимым образом предопределяет уровень строгости ее изучения в целом, однако последовательное воплощение этого принципа в школьной практике неизбежно приводит к смещению основных акцентов преподавания: изучение понятия как такового занимает неоправданно большое место по сравнению с применением этого понятия в теории и при решении задач, чисто логический аспект начинает в значительной степени доминировать над аспектом прикладным" [I6, с. 39] .

В самой математике-науке понятия в историческом плане развития появляются как необходимость систематизации и обобщения, уже встречавшихся до этого проявлений понятия. Покажем это на примере возникновения понятия группы. В XIX веке были открыты проективные, аффинные и другие преобразования, рассматривались композиции этих преобразований. Математиками было установлено, что эти преобразования образуют группы, еще до того, как было употреблено это слово, и тем более до того, как было определено, что такое группа. Таким образом, до определения абстрактного понятия группы, математики уже использовали не только разнообразные группы, но и некоторую часть теории групп, сформулированную для отдельных частных случаев. Понятие группы, как средство упорядочения всех этих результатов, появляется не на основе простого объединения всех известных в то время примеров групп, а на основе выявления общих свойств этих примеров.

Итак, одна из основных задач состоит в определении оптимальной структуры курса математики, выделение в нем основных понятий и связей между ними. Но при этом заметим, что построение программ и учебников по определенной системе еще не гарантирует усвоение учащимися этой системы. Само обучение должно быть направлено на усвоение этой системы, и ведущей является учебно-познавательная деятельность учащихся.

2. Психолого-педагогические основы формирования научных понятий у учащихся

Процесс обучения, направленный на осознание и усвоение учащимися системы знаний, в том числе и системы понятий, не может считаться правильно организованным, если не будут определены адекватные виды деятельности обучающегося и обучаемого по формированию этой системы.

Говоря о роли деятельности учащихся в процессе обучения, в